الانحدار الخطي البسيط

مفهوم التنبؤ

التنبؤ :

في ابسط معني له هو تقدير القيمة المستقبلية لمتغير واحد بناء علي معرفة قيم متغير اخر ، ومن الممكن استخدام مفهوم الارتباط في عملية التبؤ .

تحليل الانحدار :

هو اسلوب احصائي يقوم بصياغة اثر عدة ظواهر مؤثرة $(x_1,x_2,.....x_n)$ علي ظاهرة معينة (y) علي شكل دالة رياضية بغرض توقع قيم غير معروفة لها وتسمي الدالة الرياضية المصاغة باسم دالة الانحدار وتكون علي الصورة

دالة الانحدار

$$Y=F(x_1,x_2,.....x_n)$$

تسمي المتغيرات (الظواهر) $x_1,x_2,.....x_n$ بالمتغيرات المستقلة والمتغير الناتج (y) بالمتغير التابع

عندما يكون متغير مستقل واحد فقط يرتبط مع المتغير التابع بعلاقة الخط المستقيم اي ان :

$$\hat{Y}=a+bx$$

حيث :a ثابت الانحدار او الجزء المقطوع من محور y

B : ميل الخط المستقيم او معامل انحدار y علي x او y/x

ويحسب القيمتان a, b من العلاقة :

$$b=\frac{n(\sum xy)-(\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2-(\sum x)^2} \quad , a=\frac{(\sum y)-b(\sum x)}{n}$$

ملاحظات هامة

- ميل الخط يمثل كمية التغير في y المناظرة للمتغير x بمقدار وحده واحدة
- اشارة معامل الانحدار تدل علي نوع الارتباط (طردي او عكسي)
- توجد علاقة بين معامل االانحدار ومعامل الارتباط الخطي

==========

مثال 1

لدراسة علاقة الاستهلاك المحلي (y) بالانتاج (x) لمادة الاستهلاك (بالمليون برميل) خلال عدة سنوات اخذنا عشر قراءات تقريبية كما يلي :

X	10	13	15	14	9	7	6	6	5	5
y	6	8	9	8	7	6	5	6	5	5

اوجد معادلة الانحدار الخطي البسيط ، وتوقع قيمة الاستهلاك المحلي عندما يصل انتاج 11000000 برميل .

الحل

X	Y	Xy	X^2
10	6	60	100
13	8	104	169
15	9	135	225
14	8	112	196
9	7	63	81
7	6	140	41
6	5	30	36
6	6	36	36
5	5	25	25
5	5	25	25
$\sum x = 90$	$\sum y = 65$	$\sum xy = 632$	$\sum x^2 = 942$

$$b=\frac{n(\sum xy)-(\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2)-(\sum x)^2}=\frac{6320-(90)(65)}{9420-90^2}=\frac{470}{132}=0.36$$

$$, a=\frac{(\sum y)-b(\sum x)}{n}=\frac{(65)-(0.36\times 90)}{10}=3.26$$

معادلة خط الانحدار :

$\cdots \hat{y}=a+b\hat{x}$ $\quad \therefore \hat{y}=3.26+0.36\hat{x}$

عند قيمة الاستهلاك عندما يصل الانتاج الي 11000000

$\hat{y}=3.26+0.36(11)=7.22$ اي ما يعادل ==>>> 7220000

مثال 2

لدراسة العلاقة بين الدخل (x) والاستهلاك (y) بالاف الريالات ، كانت لدينا النتائج الاتية :

$\sum x = 120$,$\sum y = 100$,$\sum xy = \frac{5}{6}$ $\sum x^2 = 711$,$\sum y^2 = 406$, $n = 40$

1. احسب معامل الارتباط الخطي بين الظاهرتين ، وما نوع الارتباط ، وما مدي قوته
2. معادلة (حظ) انحدار الاستهلاك علي الدخل
3. تقدير الاستهلاك عندما يصل الدخل الي (1000) ريال

الحل

.1

$$r_p = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}} = \frac{40(516) - (120)(100)}{\sqrt{(40\times711 - 120^2)(40\times406 - 100^2)}} = \frac{8640}{9360} = 0.92$$

نلاحظ ان الارتباط طردي قوي بين الدخل والاستهلاك .

.2

$$b = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2} = \frac{8640}{14040} = 0.62$$

$$, a = \frac{(\sum y) - b(\sum x)}{n} = \frac{100 - (0.62\times120)}{40} = 0.64$$

$$\rightarrow \hat{y} = 0.64 + 0.62x$$

3. نلاحظ ان وحدة القياس هي الاف الريالات لذلك فان قيمة الدخل 10000 ستحول الي 10 الاف الريالات وبالتالي $x_h=10$ اي ان

$\hat{y} = a+bx_n = 0.64 +0.62(10) = 0.64+6.2 =6.84$

اي ان قيمة الاستهلاك المقدرة تساوي 6840 ريال

مثال 3

رغبت احدي المؤسسات في دراسة العلاقة بين قيمة المبيعات (y) بالاف الريالات والمصروف علي الدعاية (x) بالاف الريالات ، فاخذت بيانات عن سبعة فروع للمؤسسة داخل المملكة فاعطت النتائج الاتية :

$$\sum x = 28 \ , \sum y = 105 \ , \sum xy = 483 , \sum x^2 = 140 \ , \sum y^2 = 1828.5$$

1. احسب معامل الارتباط بيرسون بين الظاهرتين
2. اوجد معادلة خط الانحدار وفسرها ثم قدر قيمة المبيعات عندما يكون المصروف علي الدعاية (45200) ريال .

الحل

$$r_p = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2]\,[n\sum y^2 - (\sum y)^2]}}$$

$$= \frac{7(483)-(28)(105)}{\sqrt{[7\times140-(28^2)][(7\times1828.5-105^2]}} = \frac{3381}{\sqrt{[980-784][1299.5-11025]}} = 0.75$$

$$b = \frac{n(\sum xy)-(\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2-(\sum x)^2} = \frac{441}{196} = 2.25$$

$$a = \frac{(\sum y)-b((\sum y)}{n} = \frac{(105)-(2.25\times28)}{7} = 6$$

$$\rightarrow \hat{y} = 6 + 2.25x$$

← قيمة المبيعات عندما يكون المصروف يساوي (4500) ريال فنضع x=4.5

,

$\widehat{y_h} = a + bx_h$=6+2.25(4.5)=16.125

اي ان تقدير المبيعات حوالي 16125 ريال

مثال 4

البيانات التالية تمثل بيانات المصروفات الادراية (x) والارباح (y) بالاف الريالات لعينة من المنشات في مدينة ما .

المصروفات الادراية(x)	4	5	9	2	8	6	7
الارباح (y)	3	4	8	9	4	4	5

قدر الارباح عندما تبلغ المصروفات الادارية (4000) ريال اذا علمت ان

$$\sum xy = 213 \ , \sum x^2 = 275 , \sum y^2 = 227$$

$, b = -0.11$

الحل

$$a = \frac{(\sum y) - b((\sum y)}{n} = \frac{(37) - (-0.11 \times 41)}{7} = 5.93$$

$\rightarrow \hat{y}$ =5.93 +(-0.11)x

وبالتالي عندما يكون المصروفات الادراية يساوي (4000) ريال اي x=4

فان تقدير الارباح يساوي :

$$\widehat{y_h} = a + bx_h$$

=5.93+(-0.11)(4)=5.49

مثال 5

اذا كانت كميات انتاج الحديد والصلب (بالمليون طن) لاحد المصانع في الفترة عام 2004 م ، 2088 م معطاة بالجدول التالي .

السنة	2004	2005	2006	2007	2008
كمية الانتاج	66.6	84.9	88.6	78.0	96.8

قدر معادلة الاتجاه العام الخطي .

الحل

X	X	Y	Xy	X^2
2004	0	66.6	0	0
2005	1	84.9	84.9	1
2006	2	88.6	177.2	4
2007	3	78.0	234	9
2008	4	96.8	387.2	16
$\sum$	$\sum x = 10$	$\sum y = 414.9$	$\sum xy = 883.3$	$\sum x^2 = 30$

$$b=\frac{n(\sum xy)-(\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2)-(\sum x)^2} = \frac{4416.5-4149}{150-100} = \frac{267.5}{50} = 5.35$$

$$, a=\frac{(\sum y)-b(\sum x)}{n} = \frac{414.9-(5.35\times 10)}{5} = 72.28$$

$$\rightarrow \hat{y}=72.28+5.35x$$

مثال 6

اذ اعطيت البيانات التالية من الدخل بمئات الريالات (x) وقيمة الاستهلاك (y) بمئات الريالات لخمسة اشخاص فاجب عما يلي :

اذا كان :

$$\sum xy = 512 , \sum x = 68 , \sum y = 37 , \sum x^2 = 990 , \sum y^2 = 277 , n = 5$$

1. معامل انحدار (b) الدخل علي الاستهلاك يساوي .....

a. 1.000
b. 0.250
c. 0.135
d. 0.000

القانون المستخدم لايجاد معامل الانحدار (b) :

$$b = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2} = \frac{(5)(512) - (68)(37)}{5(990) - (68)^2} = \frac{44}{326} = 0.135$$

2. ثابت (a) الانحدار يساوي ....

a. 1.29
b. 5.56
c. 20.52
d. 10.95

القانون المستخدم لايجاد ثابت الانحدار (a) :

$$a = \frac{(\sum y) - b(\sum x)}{n} = \frac{(37) - (0.135)(68)}{5} = \frac{37 - 9.18}{5} = \frac{27.82}{5} = 5.56$$

3. تقدير الاستهلاك عندما يصل الدخل الي 10000 ريال .....

a. 16.33

b. 15.09

c. 21.96

d. 19.06

نعوض من المعادلة $x=\frac{1000}{100}$ ، حيث ان البيانات من التمرين لمئات الريالات .

القانون المستخدم لتقدير قيمة y

$\hat{y}= a+bx$

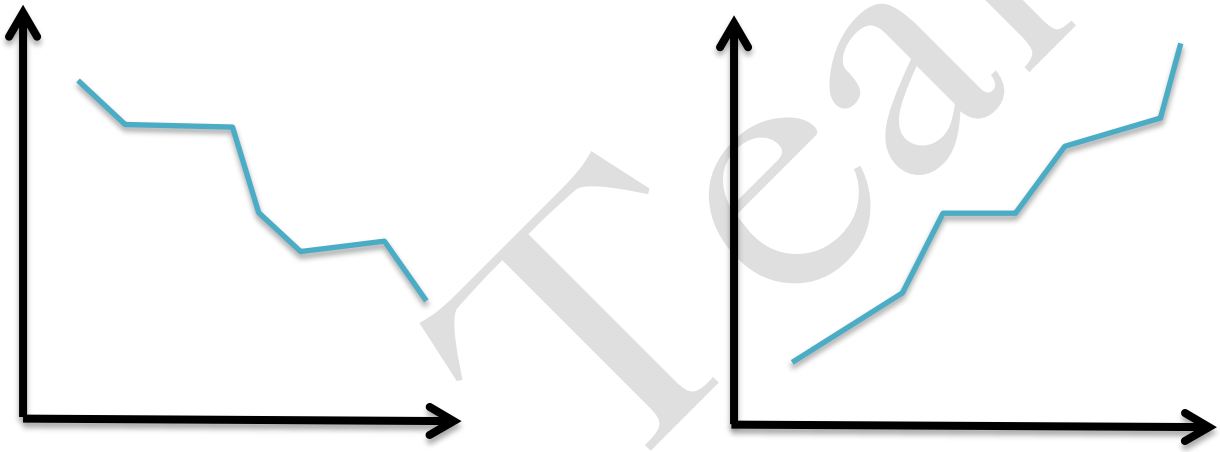
5.56+(0.135)(100) =5.56+13.5=19.06

Top Team

تطبيق الانحدار في مجال السلاسل الزمنية

الاتجاه العام في السلاسل الزمنية :

يختلف الاتجاه العام في السلاسل الزمنية حسب طبيعة البيانات واحد انواع الاتجاه العام هو الاتجاه الخطي .



سلسلة ذات اتجاة عام خطي متزايد

سلسلة ذات اتجاة عام خطي متناقض

احد طرق تعيين الاتجاه العام الخطي هو استخدام الانحدار الخطي البسيط

ملاحظات :

نعين للمتغير المستقل القيم x=0,1,2..... لتمثيل وحده الزمن

تدل اشارة معامل الانحدار b علي نوع الاتجاة العام (زيادة او نقصان)

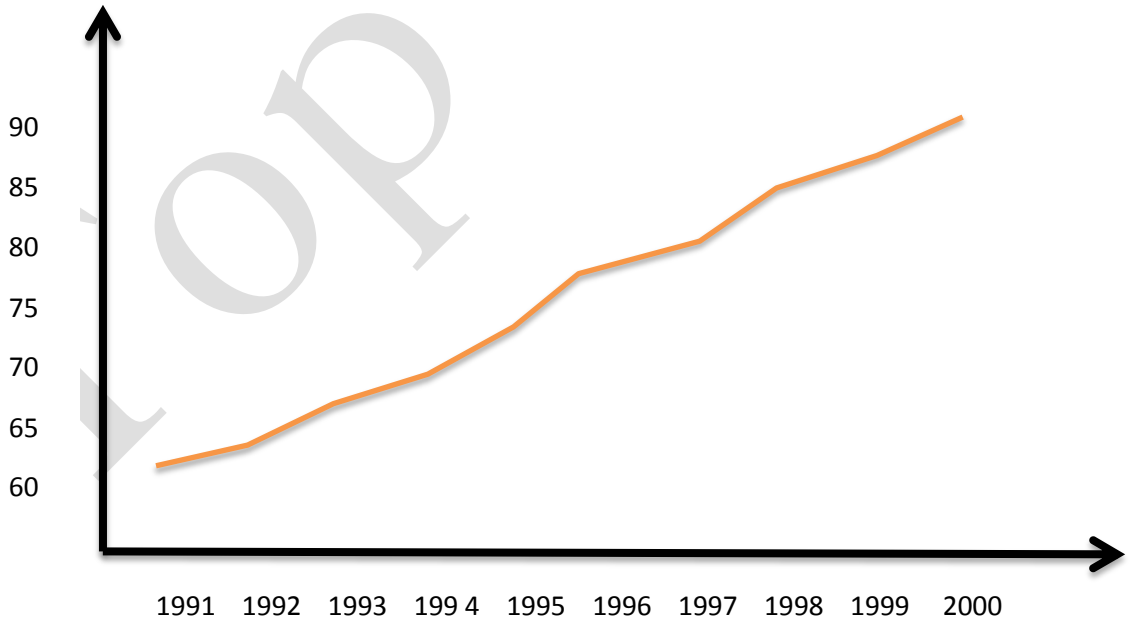
مثال7

البيانات التالية تمثل عدد الحقول المكتشفة (y) خلال الاعوام 1991 م الي 2000 م .

السنة	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
y	62	63	67	69	70	75	79	82	84	86

حدد الاتجاة العام ، ثم قدر معادلة الاتجاة العام الخطي ، وتوزع عدد الحقول المكتشفة عام 2002 م

الحل



يدل الاتجاه العام علي الزيادة في قيمة عدد الحقول المكتشفة .

السنة	x	y	Xy	X^2
1991	0	62	0	0
1992	1	63	63	1
1993	2	67	134	4
1994	3	69	207	9
1995	4	70	280	16
1996	5	75	375	25
1977	6	79	474	36
1998	7	82	574	49
1999	8	84	672	64
2000	9	86	774	81
$\sum$	$\sum x = 45$	$\sum y = 737$	$\sum xy = 3553$	$\sum x^2 = 285$

$$b=\frac{n(\sum xy)-(\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2)-(\sum x)^2}=\frac{(35530)-(45)(737)}{(2850)-(45)^2}=\frac{2365}{825}=2.87$$

$$a=\frac{(\sum y)-b(\sum x)}{n}=\frac{(737)-(2.87\times45)}{10}=60.79$$

معادلة الاتجاه العام الخطية في هذا المثال

$$\hat{y}=60.79+2.87x$$

ولتوقع عدد الحقول المتوقع اكتشافها عام 2002م ونعوض بقيمة تدل علي هذا الزمن ، حيث ان

X=9 → 2000 م

$\therefore X_h=11 \rightarrow$ 2002 م

وبالتعويض في معادلة الاتجاة العام نجد ان :

$$\widehat{y_h}=60.79+2.87x_n=60+2.87(11)\cong 92$$

لمعرفة الفرق بين استخدام الانحدار الخطي البسيط واستخدام السلسلة الزمنية البسيطة نذكر المثالين الاتيين

المثال الاول

عمر الاطفال بالشهور (x)	1	2	3	4	5	7	8	9
وزن الاطفال بالكجم (Y)	2.5	3	3.5	3.4	7	8	7.8	8.5

بحساب معادلة الانحدار الخطي البسيط نجد ان :

$$Y=1.367+0.84x$$

بفرض اننا نريد التنبؤ بوزن طفل لا ينتمي للمجموعة السابقة وعمره سنة اشهر فالتعويض في المعادلة السابقة عن x=6 ، فان ذلك يؤدي الي

$$Y=1.367+0.84\times6$$

اي ان وزن الطفل عمره ستة اشهر يقدر بحوالي 6.4كجم ويلاحظ هنا الاتي

_ يجب استخدام المعادلة السابقة لتقدير وزن طفل عمره ضمن مدي البيانات المعطاه (اي ما بين شهر واحد الي 9 اشهر

_ مشاهدات البيانات السابقة مستقلة بعضها عن بعض

Top Team

المثال الثاني

مثال علي السلسة الزمنية ، بفرض لدينا طفل تم تسجيل وزنه في نهاية كل شهر من ولادته حتي بلوغه تسعه اشهر ولرخصت بياناته كما يلي :

X عمر الطفل بالشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y وزن الطفل	2.5	3	4	4.8	6	6.5	7	7.8	8.5

بحساب معادلة الانحدار الخطي البسيط نجد ان

$Y= 1.725 +0.768\ x$

بفرض اننا نريد التنبؤ مستقبليا بوزن هذا الطفل حين يصبح عمر عشرة اشهر فالبتعويض في المعادلة السابقه عن

$X=10$

$Y=1.725+0.768\ (10)$

$=1.725+7.68 =9.405$

اي ان وزن الطفل حين يصبح عمره عشرة اشهر يقدر بحوالي 9.4 كجم

ويلاحظ هنا الاتي :

_ تستخدم المعادلة السابقة لتقدير وزن الطفل حيث يزيد عمره عن 9 اشهر بفتره زمنية لاتزيد عن نصف الفترة الزمنية المعطاة :

_ مشاهدات البيانات السابقة مرتبطه بعضها ببعض

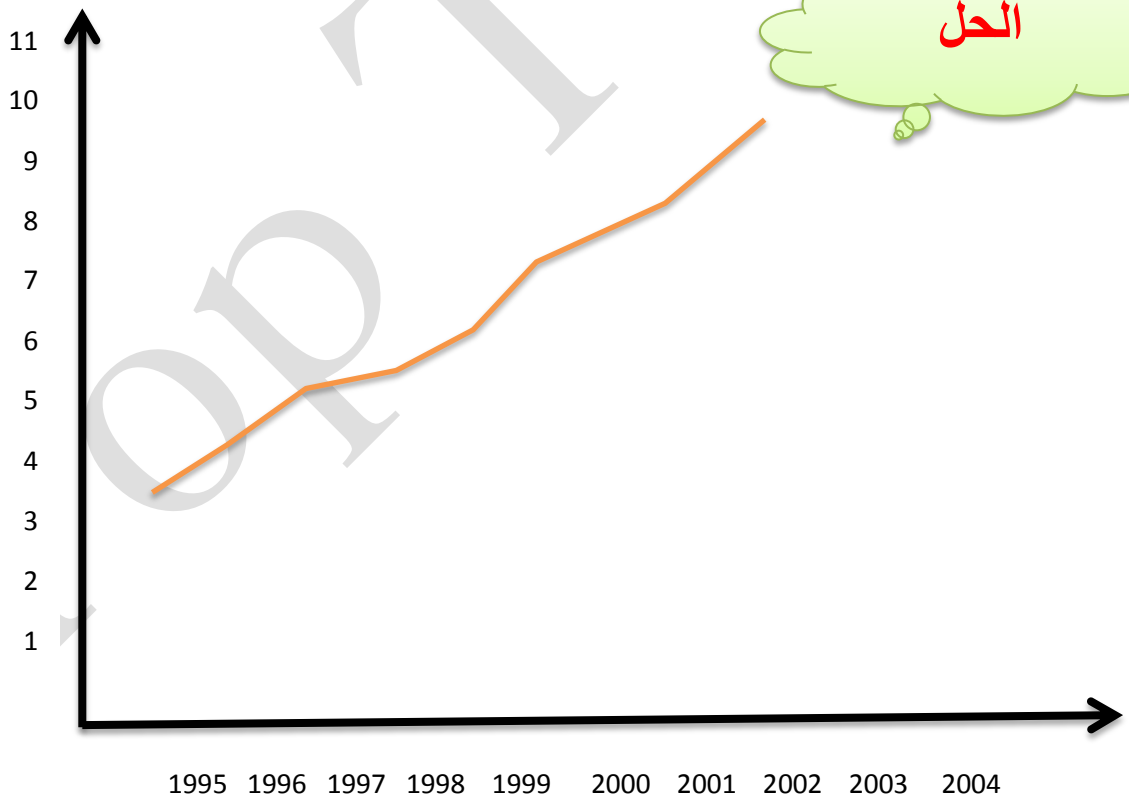
مثال 8

البيانات التقريبية التالية تمثل الاستهلاك المحلي السنوي لمادة الاسفلت (y) بملايين البراميل خلال الاعوام 1995 م ← 2002 م

السنة	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
الاستهلاك	4.5	5	6	6.5	7	8	9	11

1. مثل السلسلة الزمنية بيانيا ، ثم علق علي الرسم
2. قدر معادلة الاتجاه العام الخطي ثم نوقع الاستهلاك المحلي لمادة الاسفلت عام 2004م

الحل



سلسلة ذات اتجاه خطي متزايد

ويدل هذا الاتجاه علي الزيادة في الاستهلاك

السنة	الاستهلاك (y)	x	xy	X^2
1995	4.5	0	0	0
1996	5	1	5	1
1997	6	2	12	4
1998	6.5	3	19.5	9
1999	7	4	28	16
2000	8	5	40	25
2001	9	6	54	36
2002	11	7	77	49
$\sum$	$\sum y = 57$	$\sum x = 28$	$\sum xy = 235.5$	$\sum x^2 = 140$

$$b=\frac{n(\sum xy)-(\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2)-(\sum x)^2}=\frac{8(235.5)-(28)(57)}{8(140)-(28)^2}=0.86$$

$$a=\frac{(\sum y)-b(\sum x)}{n}=\frac{(57)-(6.85)(28)}{8}=4.15$$

... معادلة الاتجاه العام :

$$\hat{y}=a+b\hat{x}$$

$$Y=4.15+0.85\hat{x}$$

ولنوقع استهلاك الاسفلت عام (2004) نلاحظ ان

عام 2002 ← x=7 ، وعام 2004 ← x=9

$$\hat{y}=(4.15)+(0.85)(9)=11.8$$