

# Chapter 6

## الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية

### التجربة العشوائية :-

هي أي إجراء نعلم مسبقاً جميع النواتج الممكنة له وإن كنا لا نستطيع أن نتنبأ بأي من هذه النتائج سيتحقق فعلاً .

### التجربة :-

هي أي إجراء يمكن وصفه وصفاً دقيقاً وملاحظة ما ينتج عنه وقد تكون التجارب مؤكدة أو عشوائية .

### فراغ العينة :-

هو المجموعة المكونة من جميع النتائج الممكنة من تجربة عشوائية ويرمز له بالرمز (S) .  
ويطلق عليه لفظ الحدث الشامل ، فكل نتيجة على حدة تسمى عنصر والفراغ يشمل جميع العناصر .

### مثال (1)

عند القاء قطعة نقود متوازنة مرة واحدة فما هو فراغ العينة ؟

### الحل

نجد أن النتائج الممكنة أو فراغ العينة لهذه التجربة هي :-  
صورة (H) أو كتابة (T)  
فإن مجموعة النتائج لهذه التجربة أي فراغ العينة لهذه التجربة هو :-

$$S = [H, T]$$

=====

### مثال (2)

عند القاء قطعتين نقود مرة واحدة ، أو قطعة نقود واحدة مرتين ، ما هو فراغ العينة ؟

### الحل

مجموعة النتائج لهذه التجربة أي فراغ العينة لهذه التجربة هو :-

$$S = [HH, HT, TH, TT]$$

وفراغ العينة قد يكون منتهياً محدوداً وقد يكون غير منتهي غير محدود .  
فراغ العينة المحدود :- هو الفراغ الذي يحتوي على عدد محدود من العناصر .

**فراغ العينة اللانهائي :-**

هو الفراغ الذي يحتوي على عدد لا نهائي من العناصر.

**فراغ العينة اللانهائي**

فراغ عينة لا نهائي غير قابل للعد

هو الفراغ الذي يحتوي على عدد لا نهائي من العناصر غير قابلة للعد.

فراغ عينة لا نهائي قابل للعد

هو الفراغ الذي يحتوي على عدد لا نهائي من العناصر وقابلة للعد مثل القاء زهرة نرد حتى يظهر الوجه.

**الحادثة**

هي مجموعة جزئية من فراغ العينة.

**الحادثة**

الحادثه المركبه

هي الحادثة التي تحتوي على أكثر من عنصر من عناصر فراغ العينة.

الحادثة البسيطة

وهي الحادثة التي تتكون من عنصر واحد من عناصر فراغ العينة.

الحادثه المؤكده

هي الحادثة التي لا بد من وقوعها فمثلاً عند القاء عملة لا بد من ظهور الصورة أو الكتابة.

## الحادثه المستحيله

هي الحادثه التي لا يكون للتجربه أي نواتج متعلقه بالحادثه المذكوره ويرمز للأحداث المستحيله بالرمز  $\emptyset$ .

مثال (3)

عند القاء قطعتي نقود مرة واحدة ، حدد ما إذا كانت الحوادث الآتية حوادث بسيطة أم لا ، إذا علمت ان فراغ العينة هو  $S = [HH, HT, TH, TT]$

نوع الحادثه	وصفها	الحادثه
حادثه بسيطه	حادثه تمثل ظهور كتابتين	$A_1 = [TT]$
حادثه بسيطه	حادثه تمثل ظهور صورتين	$A_2 = [HH]$
حادثه مركبه	حادثه تمثل ظهور وجهين	$A_3 = [HH, TT]$
حادثه مركبه	حادثه تمثل ظهور صورة واحدة على الأصل	$A_4 = [HH, HT, TH]$

## الفئة الشاملة (فراغ العينة)

حادثه مؤكده لأنها مجموعۀ جزئية من نفسها أي أن  $S \subset S$

مثال (4)

عند القاء زهرة نرد متزنه مرة واحدة ، فإن الحادثه المؤكده هي ظهور أي وجه من الـ



مثال (5)

عند القاء زهرة نرد متزنه مرة واحدة ، فإن المثال على الحادثه المستحيله هو ظهور عدد فردي وعدد زوجي في آن واحد .

## الحوادث المتماثلة

هي تلك الحوادث التي يكون لها نفس فرصة الحدوث .

مثال (6)

عند القاء قطعة نقود متزنة مرة واحدة فإن فرص ظهور الكتابة تماثل فرص ظهور الصورة .

## الأحداث المتنافية (المانعة) بالتبادل

إذا كان هناك حدثان  $A, B$  وكان وقوع الحادتين معاً حدثاً مستحيلاً وهذا يعني أن الحادتين لا يمكن أن يقعاً معاً أو وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر فإنه يقال أن  $A, B$  حدثان ملاغان أو متنافيان بالتبادل .

## الأحداث المستقلة

لو أن لدينا حدثان وكان وقوع أحدهما لا يؤثر في وقوع الآخر فيقال أن الحادتين مستقلان.

مثال (7)

- عند القاء قطعتي نرد فإن ظهور رقم ما على الزهرة الأولى لا يؤثر ولا يتأثر بما ظهر على القطعة الثانية .
- عند القاء أكثر من قطعتي نرد فإن ظهور رقم ما على أي قطعة نرد لا يؤثر ولا يتأثر بما ظهر على قطع النرد الأخرى .

## طرق العد (التوافيق)

عدد الطرق التي يمكن بها اختيار (x) من الأشياء من بين (n) من هذه الأشياء.

$$\left[ \begin{matrix} n \\ x \end{matrix} \right] = C_x^n = \frac{n!}{x! (n-x)!}$$

حيث  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \dots 1$   
فمثلاً  $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

مثال (8)

بكم طريقة يمكن اختيار رجلين من بين أربع رجال ؟

الحل

$$n = 4, x = 2$$

$$\left[ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right] = C_2^4 = \frac{4!}{2! (4-2)!}$$

مثال (9)

أعلنت أحد الشركات من توفر ثلاث وظائف شاغرة للرجال ووظيفتين للنساء ، بكم طريقة يمكن الاختيار إذا كان عدد المتقدمين ست رجال وخمس نساء ؟

الحل

عدد طرق اختيار الرجال:-

$$C_3^6 = \frac{6!}{3!(3!)} = 20 \text{ طريقة}$$

عدد طرق اختيار النساء:-

$$C_2^5 = \frac{5!}{2!3!} = 10 \text{ طريقة}$$

عدد طرق الاختيار الكلي :-

$$H \times I = 20 \times 10 = 200 \text{ طريقة}$$

ملاحظات

$$(1) a^0 = 1 \quad (2) 0! = 1 \quad (3) C_0 = 1 \quad (4) C_n^n = 1$$

## الاحتمال

التعريف القديم (الكلاسيكي) للاحتمال  $P(A)$  :-

هو عدد الحالات المواتية للحادثة مقسومة على عدد الحالات الكلية.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$$m \leq n$$

## مثال (10)

إذا كانت لديك عشر بطاقات مرقمة من الرقم (1) حتى (10) موضوعة على طاولة بشكل عشوائي ومقلوبة ثم سحبت إحدى هذه البطاقات :-  
 أ- ما احتمال الحصول على بطاقة تحمل الرقم (4) ؟  
 ب- ما احتمال الحصول على بطاقة تحمل رقم يقبل القسمة على (3) ؟

## الحل

أ- فراغ العينة في هذه الحالة هي الأرقام من (1) إلى (10) ، أي أن  $(n = 10)$  وبالتالي احتمال الحصول على بطاقة تحمل الرقم (4) هو :-

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{10}$$

ب- الحصول على بطاقة تحمل رقم يقبل القسمة على 3 يتحقق عند ظهور أحد ثلاثة أرقام هو 3, 6, 9 أي أن  $(m = 3)$  :-

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{3}{10} = 0.3$$

## ملحوظة

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

## مثال (11)

ألقيت زهرة نرد متزنة مرة واحدة ، فما احتمال ظهور :-



(ج) عدد اقل من الوجه

(ب) عدد زوجي

(أ) عدد فردي

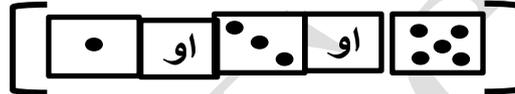


(د) عدد اكبر من الوجه

## الحل

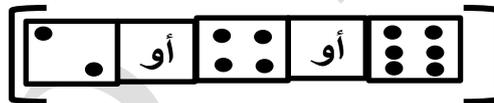
$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(أ) احتمال ظهور عدد فردي (A) هو :-



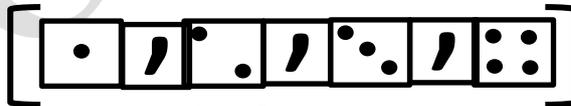
$$m = 3 \quad P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(ب) احتمال ظهور عدد زوجي (B) هو :-

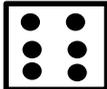


$$m = 3 \quad P(B) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(ج) عدد أقل من الوجه هو: 



$$m = 4 \quad P(C) = \frac{m}{n} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

(د) احتمال ظهور عدد أكبر من الوجه هو: 

$$P(D) = \frac{0}{6} = 0$$

وهذا الحدث مستحيل لأنه لا يوجد عدد أكبر من الـ (6)

## مثال 12

ألقيت قطعنا نقود متزنتان مرة واحدة ، فما احتمال :-  
 أ- ظهور صورة واحدة على السطح العلوي ؟  
 ب- ظهور صورة واحدة على الأقل ؟

## الحل

$$S = [ HH, HT, TH, TT ]$$

(أ) احتمال ظهور صورة واحدة على السطح العلوي :-

$$m=2 \quad P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(ب) عدد الطرق التي يمكن ان يظهر بها على السطح العلوي صورة واحدة على الأقل هو :-

$$m = 3 \quad P(B) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$$

## ملاحظات :-

- (1) احتمال حدوث الحدث المؤكد = 1
- (2) احتمال حدوث الحدث المستحيل = 0
- (3) احتمال حدوث الحدث الممكن يكون ما بين 0 الى 1

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

## التعريف التجريبي للاحتمال

هو نهاية التكرار النسبي عندما يؤول عدد المشاهدات إلى مالا نهاية.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{n} \right)$$

احتمال وقوع الحدث (A)

## التعريف الرياضي للاحتمال

يبين التعريف الرياضي للاحتمال على أساس افتراض مسلمات تسمى مسلمات نظرية الاحتمال .

### مسلمات نظرية الاحتمالات :-

- 1- يرافق كل حادثة A عدد معين P (A) يسمى احتمال A ويحقق  $0 \leq p(a) \leq 1$
- 2- احتمال وقوع حادثة مؤكدة يساوى واحد  $P(A) = 1$  ,  $P(S) = 1$
- 3- إذا كانت A, B حادثتين متنافيتان فإن  $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$

### مثال 13

سحبت ورقة من مجموعة أوراق اللعب (الكوتشينة) ، فما احتمال أن تحمل الرقم 5 أو صورة .

### الحل

بفرض أن A ترمز للرقم 5 ، B ترمز للصورة فيكون :-

$$P(A) = \frac{4}{52} , P(B) = \frac{12}{52}$$

وحيث أن الحادثان متنافيات فإن الاحتمال المطلوب :-

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{52} + \frac{12}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

اختر الإجابة الصحيحة للفقرات التالية

(1) قيمة الاحتمال تتراوح بين ..... : .....

- (A) (0, 1) (B) (-1, 1) (C) (-2, 2) (D) (0, 2)

(2) تعتبر حادثة ظهور عدد يقبل القسمة على 5 عند القاء زهرة نرد متزنة مرة واحدة من الحوادث هي .....

- (A) البسيطة (B) المركبة (C) المؤكدة (D) B, A

(3) القاء قطعة نقود وزهرة نرد مرة واحدة مثال على .....

- (A) فراغ عينة (B) حادثة (C) تجربة عشوائية (D) تجربة غير عشوائية

(4) من شروط التوزيع الاحتمالي المنفصل .....

- (A) [ P(X)] (B)  $0 \leq P(X) \leq 1$  (C)  $-1 \leq P(X) \leq 1$  (D) B, A

(5) إذا تم القاء زهرة نرد مرة واحدة ، فأجب عن الفقرات الآتية :-

(A) عدد عناصر فراغ العينة.....

- (A) 12 (B) 6 (C) 2 (D) 24

$$S = [1, 2, 3, 4, 5, 6] \longrightarrow S = 6$$

(B) احتمال ظهور عدد زوجي هو.....

- (A) 0.1 (B) 0.25 (C) 0.5 (D) 0.75

$$S = [1, 2, 3, 4, 5, 6] \quad (A) = [2, 4, 6]$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0.5$$

(C) احتمال ظهور عدد يقبل القسمة على 3 هو.....

- (A) 0.33 (B) 0.17 (C) 0.83 (D) 1.0

(6) صندوق به 4 كرات بيضاء ، 3 كرات زرقاء ، سحبته منه كرتان عشوائياً على

التوالي ، فما هو احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء ؟

- (A) 2/7 (B) 3/7 (C) 4/7 (D) 5/7