

بعض قوانين الاحتمال

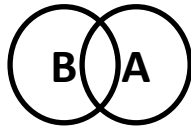
نظريه

إذا كانت \bar{A} هي مكملة المجموعة A ، فإن $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

الاحداث المانعة والغير مانعة

احتمال وقوع الحدثان الغير المانعان

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$$



حدثان غير مانعان

احتمال وقوع الحدثان المانعان

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$$



حدثان مانعان

الاحداث المستقلة وغير المستقلة

احتمال وقوع حدثان غير مستقلان

$$P(A \text{ and } B) = P(A) P(B/A)$$

احتمال وقوع حدثان مستقلان

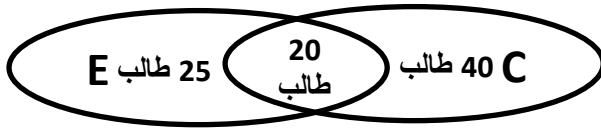
$$P(A \text{ and } B) = P(A) P(B)$$

حيث $P(B/A)$ يسمى الاحتمال الشرطي، بمعنى وقوع الحدث B بشرط أن يكون الحدث A قد وقع فعلاً.

مثال (1)

اختير طالب عشوائياً من عينة مكونة من 100 طالب من كلية الاقتصاد والإدارة فكان منهم من يدرس دورات تدريبية فوجد 20 طالباً يدرسون لغة إنجليزية وحاسب آلي و40 طالب حاسب آلي فقط و25 طالب يدرسون لغة إنجليزية فقط ، أوجد الاحتمالات الآتية :-

- احتمال أن يدرس الطالب حاسب آلي (C) .
- احتمال أن يدرس الطالب لغة إنجليزية (E) .
- احتمال أن يدرس الطالب المادتين معاً .
- احتمال أن يدرس الطالب حاسب آلي ولغة إنجليزية .
- احتمال أن لا يدرس أيّاً من المادتين .



الحل

أ- احتمال أن يدرس الطالب حاسب آلي هو :-

$$P(C) = \frac{40+20}{100} = \frac{60}{100} = 0.6$$

ب- احتمال أن يدرس الطالب لغة إنجليزية هو :-

$$P(E) = \frac{25+20}{100} = \frac{45}{100} = 0.45$$

ت- احتمال أن يدرس الطالب المادتين معاً هو :-

$$P(E \text{ and } C) = \frac{20}{100} = 0.2$$

ث- احتمال أن يدرس حاسب آلي أو لغة إنجليزية هو :-

$$P(C \text{ or } E) = P(C) + P(E) - P(C \text{ and } E) \\ = 0.6 + 0.45 - 0.2 = 0.85$$

ج- احتمال أن يدرس أي من المادتين هو :-

$$1 - P(C \text{ or } E) = 1 - 0.85 = 0.15$$

الاحتمال الشرطي

إذا كانت A, B حادثتان في فراغ العينة S وكان $P(B) > 0$ ، فإن احتمال حدوث الحادثة

$$P(A/B) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(B)}$$

A بشرط حدوث الحادثة B يساوي :-

مثال (2)

اختير طالب عشوائياً من عينة من اتحاد إحدى الجامعات وكان من بينهم بعض الطلبة المثاليين كما هو موضح بالجدول الآتي :-

الطالب	مثالي	عادي	المجموع
الكلية العلمية	3	1	4
الكلية الأدبية	4	2	6
المجموع	7	3	10

أوجد الاحتمالات التالية :-

- أ- احتمال أن يكون الطالب من كلية علمية بشرط أن يكون مثالي .
ب- احتمال أن يكون الطالب مثالياً بشرط أن يكون من كلية أدبية .

الحل

احتمال أن يكون الطالب من كلية علمية ومثالي هو 0.3 واحتمال أن يكون مثالي هو 0.7 .
أ- احتمال أن يكون الطالب من كلية علمية بشرط أن يكون مثالي هو :-

$$P(A) = \frac{0.3}{0.7} = \frac{3}{7}$$

ب- احتمال أن يكون من كلية أدبية هو 0.5 ، واحتمال أن يكون من كلية أدبية وفي نفس الوقت مثالي هو 0.4 ، فيكون احتمال ان يكون الطالب مثالياً بشرط ان يكون من كليه ادبيه هو :-

$$P(B) = \frac{0.4}{0.6} = \frac{4}{6}$$

مثال (3)

في بحث لدراسة مدى تأثير دورات تدريبية في الحاسب الآلي على نجاح الطالبات في مادة الاحصاء حصلنا على المعلومات الموضحة بالجدول التالي من خلال عينة عشوائية من 300 طالبة من الطالبات :-

الدورة النتيجة	مثالي A ₁	عادي A ₂	المجموع
ناجحة B ₁	120	80	200
راسبة B ₂	30	70	100
المجموع	150	150	300

فإذا اختيرت طالبة عشوائية، أوجد الاحتمالات التالية:-

- (1) أن تكون الطالبة ناجحة.
- (2) أن تكون الطالبة حاصلة على دورة .
- (3) أن تكون الطالبة ناجحة وحاصلة على دورة .
- (4) أن تكون الطالبة ناجحة بشرط ان تكون من الحاصلات على دورة .

الحل

(1) أن تكون الطالبة ناجحة:-

$$P(B_1) = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$$

(2) أن تكون الطالبة حاصلة على دورة هو :-

$$P(A_1) = \frac{150}{300} = 0.5$$

(3) أن تكون ناجحة وحاصلة على دورة :-

$$P(B_1 \text{ and } A_1) = \frac{120}{300} = 0.4$$

(4) أن تكون ناجحة بشرط أن تكون من الحاصلات على دورة:-

$$P(B_1 / A_1) = \frac{P(B_1 \text{ and } A_1)}{P(A_1)} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8$$

$$\text{Or } P(B_1 / A_1) = \frac{120}{150} = 0.8$$

الاستقلال

إذا كانت A, B حادثتان في فراغ العينة (S) فإن A, B حادثتان مستقلتان إذا وإذا فقط

:-

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B)$$

ملحوظه

• إذا كانت A مستقلة عن B فإن :-

$$P(A / B) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

• إذا كانت B مستقلة عن A فإن :-

$$P(B / A) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

مثال (4)

ألقيت قطعنا نرد مرة واحدة ، فما احتمال ظهور الرقم 3 على القطعة الأولى و 4 على القطعة الثانية ؟!

الحل

بفرض أن (A) هي ظهور الوجه 4 ، (B) هي ظهور الوجه 3 فإن :-

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

مثال (5)

بفرض أن لقب الأسرة المثالية متوقف على تمييز كل الأبناء والبنات بالأسرة ، إذا كان احتمال أن يكون الابن A هو مثالياً في كليته هو 0.8 وكان احتمال أن تكون شقيقته B هي مثالية في كليتها هو 0.9 ، فما احتمال أن تأخذ الأسرة لقب الأسرة المثالية؟ وما احتمال حصول الابن أو شقيقته على المثالية؟

الحل

بفرض أن احتمال حصول الابن على المثالية هو $P(A) = 0.8$
وا احتمال حصول شقيقته على المثالية هو $P(B) = 0.9$

• احتمال حصول الأسرة على لقب الأسرة المثالية هو :-

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B) = 0.8 \times 0.9 = 0.72$$

• احتمال حصول الابن أو شقيقته على المثالية هو :-

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B) = 0.8 + 0.9 - 0.72 = 0.98$$

مثال (6)

أعلنت جامعة الملك عبد العزيز عن إرسال ثلاث بعثات من كلية الآداب لدراسة الدكتوراه ، فتقدم لتلك البعثات 5 طلبة و3 طالبات ، وعند الاختيار وجد انهم متقاربون في المؤهل والخبرة وشرط اللغة المطلوب ، فتقرر طريقة الاختيار العشوائي أوجد :-

- أ- احتمال أن تكون البعثة من الطلبة فقط.
ب- احتمال اختيار طالبة واحدة.
ج- احتمال اختيار طالبة على الأكثر.
د- احتمال اختيار طالبة واحدة على الأقل.

الحل

عدد الطرق التي يمكن بها اختيار 3 من 8 اشخاص هي :-

$$n = c_3^8 = \frac{8!}{3! \times 5!} = 56$$

عدد الطرق التي يمكن بها اختيار 3 من 5 اشخاص هو :-

$$m = c_3^5 = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

(أ) احتمال ان تكون البعثة من الطلبة فقط هي :-

$$\therefore P(3A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$$

(ب) احتمال اختيار طالبة واحدة (أي سوف نختار طالبة و طالبين) :-

$$c_1^3 \times c_2^5 = \frac{3!}{2!} \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 30$$

$$\therefore P(2A, B) = \frac{m}{n} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

(ج) احتمال اختيار طالبة واحدة على الأكثر = احتمال اختيار طالبة واحدة + احتمال عدم اختيار طالبة :-

$$P(3A) + P(2A, B) = \frac{10}{56} + \frac{30}{56} = \frac{40}{56} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$$

(د) احتمال اختيار طالبة واحدة على الأقل = 1 - احتمال أن تكون البعثة من الطلبة فقط :-

$$= 1 - P(3A) = 1 - \frac{10}{56} = \frac{46}{56} = \frac{23}{28}$$

مثال (7)

أسرة لديها ثلاثة أطفال، فما احتمال أن يكون من بينهم بنت بشرط أن:-
 (1) الطفلة الكبرى بنت .
 (2) واحد من الأطفال على الأقل بنت.

الحل

نفرض أن الولد (b) ، البنت (g)
 فراغ العينة S :-

$$S = [bbb, bbg, bgb, gbb, gbg, bgg, ggb, ggg]$$

نفرض أن :

$$[bgg, gbg, ggb] = \text{بنتان} = A$$

$$[gbb, gbg, ggb, ggg] = \text{الطفل الأكبر بنت} = B$$

$$[bbg, bgb, gbb, bgg, gbg, ggb, ggg] = \text{واحدة على الأقل بنت} = C$$

$$A \text{ and } B = [gbg, ggb]$$

$$A \text{ and } C = [bgg, gbg, ggb]$$

$$P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{7}{8}$$

$$P(A \text{ and } B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \text{ and } C) = \frac{3}{8}$$

$$(1) P(A / B) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(B)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$$

$$(2) P(A / C) = \frac{P(A \text{ and } C)}{P(C)} = \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{7} = \frac{3}{7}$$

مثال (8)

في بحث لدراسة العلاقة بين الكلية التي تنتمي إليها الطالبة ومدى حفظها للقرآن الكريم، اختيرت عينة عشوائية من طالبات جامعة الملك عبد العزيز فكانت لدينا البيانات التالية:-

المستوى \ الكلية	الأدب (m)	علوم (s)	اقتصاد (c)	المجموع
ممتاز (e)	60	50	70	180
جيد (g)	25	30	20	75
ضعيف (b)	15	20	10	45
المجموع	100	100	100	300

(1) اختيرت طالبة عشوائياً، فما احتمال أن تكون:-

- أ- من كلية الآداب.
- ب- ممتازة.
- ت- غير ضعيفة.
- ث- من غير كلية العلوم.
- ج- من كلية العلوم ممتازة.
- د- من كلية العلوم أو ممتازة.

أ- احتمال ان تكون من كلية الآداب :-

$$P(m) = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$$

ب- احتمال ان تكون ممتازة :-

$$P(e) = \frac{180}{300} = 0.6$$

ت- احتمال أن تكون غير ضعيفة = (1- احتمال أن تكون ضعيفة) :-

$$1 - P(b) = 1 - \frac{45}{300} = \frac{255}{300} = 0.85$$

ث- احتمال ان تكون من غير كلية علوم = (1- احتمال أن تكون من كلية علوم) :-

$$1 - P(s) = 1 - \frac{100}{300} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$$

ج- من كلية العلوم و ممتازة :-

$$\frac{50}{300} = 0.16$$

ح- أن تكون من كلية العلوم او ممتازة :-

$$P(s \text{ or } e) = P(s) + P(e) - P(s \text{ and } e) \\ = 0.33 + 0.6 - 0.16 = 0.77$$

د- احتمال أن تكون من كلية الآداب مع العلم بأنها ضعيفة :-

$$P(m/b) = \frac{P(m \text{ and } b)}{P(b)} = \frac{15}{300} \cdot \frac{300}{45} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

□

اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين

(1) أجرى طبيب 500 عملية جراحية نجح منها 490 عملية، فإن احتمال نجاح عملية يجريها هذا الطبيب يساوي.....

- (A) 0.55 (B) 1 (C) 0.98 (D) 0

$$\therefore P(A) = \frac{m}{n}, \quad n = 500, \quad m = 490$$

$$\therefore P(A) = \frac{490}{500} = 0.98$$

(2) في عينة مكونة من 60 شخص وجد الآتي:-

شخص سليم	مصاب	غير مصاب
النوع		
أنثى	10	17
ذكر	13	20

(A) اختير شخص عشوائياً، فما احتمال أن يكون الشخص المختار أنثى وغير مصابة بالسكر؟

- (A) $\frac{13}{60}$ (B) $\frac{20}{60}$ (C) $\frac{10}{60}$ (D) $\frac{17}{60}$

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad m = 17, \quad n = 60$$

$$\therefore P(A) = \frac{17}{60}$$

(3) تعتبر الحادثة مستحيلة عندما

- (A) تحتوي على جميع العناصر (B) تحتوي على أكثر من عنصر
(C) لا تحتوي على أي عنصر (D) تحتوي على عنصر واحد فقط

(4) إذا كان احتمال سقوط الأمطار في الغد هو 0.6، فإن احتمال عدم سقوط في الغد هو.....

- (A) 0.70 (B) 0.40 (C) 0.30 (D) 1.3

$$\therefore P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad \longrightarrow \quad \therefore P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.40$$

(5) أسرة لديها طفلان، فإذا كانت (B) ترمز للولد، (G) ترمز للبنات وكان المتغير العشوائي (X) يمثل عدد البنات في الأسرة، فإن $P(X=0)$ تعني.....

- (A) P [BB] (B) [BBB] (C) [GB] (D) [GG]

(6) كيس به 10 كرة منها 6 بيضاء و4 سوداء ، سحبت منه كرة ، فإن احتمال أن تكون بيضاء يساوي.....

- (A) 0 (B) 0.7 (C) 0.6 (D) 0.06

$$\therefore P(A) = \frac{m}{n} , \quad m = 6 , \quad n = 10$$

$$\therefore P(A) = \frac{6}{10} = 0.6$$

(7) بكم طريقة يمكن لسيدة اختيار فستانين من بين ستة فساتين تم عرضها في إحدى المجلات ؟

- (A) 2 (B) 15 (C) 6 (D) 12

$$\begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix} = C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!} , \quad n = 6 , \quad x = 2$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = C_2^6 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$$

(8) صندوقان يحتويان على تفاح أحمر وأخضر على النحو الآتي :-

الصندوق \ نوع التفاح	مصاب	غير مصاب
أحمر	40	30
أخضر	20	50

اخترنا تفاحة عشوائياً، أجب عن الفقرات الآتية:-

(A) ما احتمال ان تكون خضراء ؟

- (A) 0.286 (B) 0.5 (C) 0.143 (D) 0.357

$$\therefore P(A) = \frac{m}{n} = \quad m = 70 , \quad n = 20 + 50 + 40 + 30 = 140$$

$$\therefore P(A) = \frac{70}{140} = 0.5$$

(B) ما احتمال أن تكون حمراء أو من الصندوق الأول؟

(A) 0.286

(B) 0.429

(C) 0.643

(D) 0.5

قانون احتمال أن تكون حمراء أو من الصندوق الأول:-

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$$

$$P(A) = \frac{\text{التفاح الأحمر}}{140} = \frac{70}{140} = 0.5, \quad P(B) = \frac{\text{من الصندوق الأول}}{140} = \frac{60}{140} = 0.429$$

$$P(A \text{ and } B) = \frac{40}{140} = 0.286$$

$$\therefore P(A \text{ or } B) = 0.5 + 0.429 - 0.286 = 0.643$$

(C) ما احتمال ان تكون خضراء وحمراء؟

(A) 0.5

(B) 1

(C) \emptyset

(D) 0