المتغيرات العشوائيه

المتغير العشوائي

هو المقدار الذي يأخذ قيماً رقمية مختلفة والتي تعبر عن نتائج التجربة العشوائية .

المتغيرات العشوائيه

المتغير العشوائي المنفصل

- ✓ هو البيانات التي تكون مفرداتها منفصلة بعضها عن بعض .
- ✓ إذا كان المتغير يأخذ قيماً تنتمي إلى مجموعة محدودة أو معدودة.

مثل :- عدد الحوادث الشهرية على الطرق السريعة ، عدد الأسهم المخصصة للفرد في شركة مساهمة .

المتغير العشوائي المستمر (المتصل)

- ✓ إذا كان يمكن يأخذ جميع القيم الصحيحة والكسرية في مدى تغيره .
- ✓ إذا كان ينتمي إلى مجموعة غير محدودة أو معدودة.

مثل :- أسعار المنتجات المختلفة – أجور العمال بإحدى الشركات .

انواع التوزيعات الاحتماليه المنفصله

إذا كان X متغير عشوائي فإنه يقال أن P (X) توزيع احتمالي منفصلاً .
إذا كان لجميع قيم X

(1) $P(X) \geq 0$

(2) $\sum P(X) = 1$

خصائص التوزيع الاحتمالى المنفصل

(1) توقع التوزيع أو متوسط التوزيع:- $E(x) = \mu = \sum x\, P(x)$

(2) تباين التوزيع:- $var(x) = \sigma^2 = \sum x^2 P(x) - \mu^2$

(3) الانحراف المعياري :- $\sqrt{var(x)} = \boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^2}$

====================

مثال (1)

إذا كان التوزيع الاحتمالي المنفصل لمتغير X كما يلي :-

X	1	2	3	4
P(x)	k	0.2	0.6	0.1

(أ) ما قيمة الثابت (K) المناسبة ؟

(ب) أوجد متوسط وتباين التوزيع

الحل

(أ) ∵ مجموع الاحتمال = 1

$\therefore \sum P(x) = 1$

$K + 0.2 + 0.6 + 0.1 = 1$

$K + 0.9 = 1$

$K = 0.1$

ب) لحساب متوسط وتباين التوزيع :-

X	1	2	3	4	$\sum$
P(x)	0.1	0.2	0.6	0.1	1
X. P(x)	0.1	0.4	1.8	0.4	2.7
X^2. P(x)	0.1	0.8	5.4	1.6	7.9

$\because \mu = E(x) = \sum X \ . P(x) = 2.7$

$\therefore \sigma^2 = var(x) = \sum X^2.P(x) - \mu^2 = 7.9 - (2.7)^2 = 7.9 - 7.29 = 0.61$

بعض التوزيعات الاحتماليه المنفصله

(1) توزيع ذو الحدين

(2) توزيع بواسون

اولاً:- توزيع ذو الحدين

إذا كان لدينا تجربة ما تتكرر (n) مرة وكان احتمال النجاح هو P ، واحتمال الفشل هو q فإن احتمال ظهور الحدث (X) يتبع الدالة الآتية :-

$$p(x) = C_x^n p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x} \quad , x = 0, 1, 2, \dots \dots , n$$

خصائص التوزيع

- المتوسط :- $\mu = np$
- التباين :- $\sigma^2 = npq$
- الانحراف المعياري:- $\sigma = \sqrt{npq}$

=========================

ثانيا :- توزيع بواسون

◦ إذا كانت (X) ترمز لعدد مرات ظهور حادثة نادرة فإن الدالة الاحتمالية للتوزيع تكون :-

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad , x = 0, 1, 2, \dots \dots$$

حيث ان($e \cong 2.7$) مقدار ثابت و(λ) متوسط التوزيع.

خصائص التوزيع

- المتوسط:- $\mu = \lambda$
- التباين:- $\sigma^2 = \lambda^2$
- الانحراف المعيارى:- $\sigma = \sqrt{\lambda}$

مثال (2)

إذا كان احتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم هو (3/4) اختيرت ثلاث دول أوجد :-

(1) التوزيع الاحتمالي لعدد الدول التي يرتفع مؤشر سوق أسهمها .

(2) متوسط التوزيع وتباينه وانحرافه المعياري .

(3) احتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم لدولتين على الأقل .

الحل

$n = 3 \quad , \quad P = \frac{3}{4} \quad , \quad P + q = 1$

$q = 1 - P = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

(X) متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم *0, 1, 2, 3* ويتبع توزيع ذي الحدين :-

$P(X) = C_x^n\, P^X\, q^{n-X} = C_x^3\, (\frac{3}{4})^X\, (\frac{1}{4})^{3-X} \quad , \quad X = 0, 1, 2, 3$

(1) التوزيع الاحتمالي لعدد الدول التي يرتفع بها مؤشر سوق الأسهم :-

$P(X = 0) = P(0) = C_0^3\, (\frac{3}{4})^0\, (\frac{1}{4})^3 = 1 \text{ X } 1 \text{ X } \frac{1}{64} = \frac{1}{64}$

$P(X = 1) = P(1) = C_1^3\, (\frac{3}{4})^1\, (\frac{1}{4})^2 = 3 \text{ X } \frac{3}{4} \text{ X } \frac{1}{16} = \frac{9}{64}$

$P(X = 2) = P(2) = C_2^3\, (\frac{3}{4})^2\, (\frac{1}{4})^1 = 3 \text{ X } \frac{9}{16} \text{ X } \frac{1}{4} = \frac{27}{64}$

$P(X = 3) = P(3) = C_3^3\, (\frac{3}{4})^3\, (\frac{1}{4})^0 = 1 \text{ X } \frac{27}{64} \text{ X } 1 = \frac{27}{64}$

$\sum p(x) = \frac{1}{64} + \frac{9}{64} + \frac{27}{64} + \frac{27}{64} = \frac{64}{64} = 1$

(2) متوسط التوزيع وتباينه وانحرافه المعياري :-

$\mu = nP = 3 \text{ X } \frac{3}{4} = \frac{9}{4} = 2.25$

$\sigma^2 = npq = 3 \text{ X } \frac{3}{4} \text{ X } \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{9}{16}} = 0.75$

(3) احتمال ارتفاع الأسهم لدولتين على الأقل :- (X = 3 أو X = 2)

$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{27}{64} + \frac{27}{64} = \frac{54}{64}$

مثال (3)

إذا كان متوسط عدد الأخطاء المطبعية في صفحات إحدى الكتب هو 3 أخطاء ،أوجد :-

(1) احتمال عدم ظهور أي خطأ .

(2) احتمال ظهور خطأين .

(3) احتمال ظهور خطأين على الأكثر .

(4) احتمال ظهور خطأين على الأقل .

الحل

$\lambda = 3$

X متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم ..... ,0, 1, 2 ويتبع توزيع بواسون :-

$$P(x) = \frac{e^{-3}\ 3^{x}}{X!} \quad , \quad X = 0, 1, 2 \ldots\ldots.$$

(1) احتمال عدم ظهور أي خطأ :- (X = 0)

$$P(X=0) = \frac{0.05 \text{ X } 3^{0}}{0\,!} = 0.05$$

(2) احتمال ظهور خطأين:- (X = 2)

$$P(X=2) = \frac{0.05 \text{ X } 3^{2}}{2\,!} = 0.225$$

(3) احتمال ظهور خطأين على الأكثر:- (X = 2, X = 1, X =0)

$$P(X \leq 2) = P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0) = 0.225 + \frac{0.05 \text{ X } 3^{1}}{1\,!} + 0.05$$

$$= 0.225 + 0.15 + 0.05 = 0.425$$

(4) احتمال ظهور خطأين على الأقل :- (X = 4, X = 3, X = 2)

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 - [P(X = 1) + P(X = 0)] = 1 - (0.15 + 0.5) = 1 - 0.20 = 0.8$$

ثانيا :ـ التوزيعات الاحتماليه المتصلة

يقـال أن للمتغير العشوائي المتصل (×) توزيعاً احتمالياً متصلاً يسمى دالة كثافة الاحتمال F(X) إذا حققت الشروط التالية :-

$(1)\ F(x) \geq 0$ $(2) \int F(x)\, dx = 1$

خصائص التوزيع الاحتمالى المتصل

توقع التوزيع اومتوسط التوزيع :- $E(x) = \mu = \int x \,.\, f(x)\, dx$

تباين التوزيع :- $Var(x) = \sigma^2 = \int x^2 .\, f(x)\, dx - \mu^2$

الانحراف المعياري :- $\sqrt{Var(x)} = \sigma = \sqrt{\sigma^2}$

انواع التوزيعات الاحتماليه المتصله

- التوزيع الطبيعى
- توزيع مربع كاى

اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين

(1) إذا كان احتمال إصابة الطائرة لأحد أهداف العدو هو($\frac{3}{4}$)فإذا أغارت ثلاث طائرات على أهداف العدو ، ما هو :-

(A) احتمال أن يصيب الهدف طائرة واحدة ؟

(A) 9/64 (B) 16/64 (C) 25/64 (D) 36/64

$n = 3 \quad , \quad P = \frac{3}{4} \quad , \quad q = \frac{1}{4}$

$P(X) = C_x^n \, P^X \, q^{\,n-X} = C_x^3 \left(\frac{3}{4}\right)^X \left(\frac{3}{4}\right)^{3-X}$

$P(X = 1) = C_1^3 \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$

(B) احتمال أن لا يصيب الهدف أي طائرة ؟

(A) 10/64 (B) 15/64 (C) 25/64 (D) 1/64

$P(X = 0) = C_0^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$

(C) احتمال أن يصيب الهدف طائرة واحدة على الأكثر ؟

(A) 20/64 (B) 30/64 (C) 40/64 (D) 10/64

$P(X \leq 1) = P(X = 1) + P(X = 0) = \frac{1}{64} + \frac{9}{64} = \frac{10}{64}$

(D) متوسط عدد الطائرات التي تصيب الهدف ؟

(A) 5/4 (B) 9/4 (C) 14/4 (D) 22/4

$\mu = nPq = 3 \text{ X } \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

(2)إذا كانت لديك التوزيع الاحتمالي المنفصل التالي :-

X	-1	0	1
P (X)	0.25	K	0.2

(A) قيمة الثابت (K) تساوى .....

(A) 0.25 (B) 1.00 (C) 0.75 (D) 0.5

$\sum P(X) = 1$

0.25 + K + 0.25 = K ⟶ K + 0.50 = 1 ⟶ K = 0.5

(B) متوسط التوزيع يساوى ......

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -0.05

$E(X) = \mu = \sum x.P(x)$ = (-1) (0.25) + 0 (0.5) + (1) (0.2)

= -0.25 + 0 + 0.20

= -0.05

(3) إذا كان X متغير عشوائي منفصل دالته الاحتمالية هي C (X) = 0, 1, 2, 3

$P(X) = C_x^3 (0.25)^X (0.75)^{3-X}$

فإن $(P(X) \leq 1)$ يساوي ......

(A) 0.422 (B) 0.141 (C) 0.75 (D) 0.844

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$= C_0^3 (0.25)^0 (0.75)^{3-0} + C_1^3 (0.25)^1 (0.75)^{3-1}$

= 0.844

(4) قدرت شركة للطيران احتمال وصول طائرتها التي تقوم من لندن متجهة إلى جدة في ميعادها هو 0.8 وقد أقلعت 4 طائرات لهذه الشركة من مطار لندن متجهة إلى جدة ، بفرض أن عدد الطائرات التي تصل في ميعادها هو المتغير العشوائي المنفصل (X) وعلى ذلك فإن دالته الاحتمالية هي ....

(A) $P(X) = C_x^4 (0.8)^X (0.2)^{4-X}$, $X = 1, 2, 3, 4$

(B) $P(X) = C_x^4 (0.8)^{4-X}$, $X = 1, 2, 3, 4$

(C) $P(X) = C_x^4 (0.8)^X (0.2)^{4-X}$, $X = 0, 1, 2, 3, 4$

$\because n = 4,\ P = 0.8,\ p + q = 1 \longrightarrow q = 0.2$

$\therefore P(X) = C_x^4 (0.8)^X (0.2)^{4-X}$, $X = 1, 2, 3, 4$

(5) إذا كان عدد المرضى الذين تم شفاؤهم بدون معين يتبع توزيع ذي الحدين ، فإذا علمت أن عدد المرضى الذين تم اعطاؤهم هذا الدواء هم 4 مرضى وأن احتمال شفاء أي مريض باستخدام هذا الدواء هو 0.9 فإن الانحراف المعياري لعدد المرضى الذين تم شفاؤهم هو.......

(A) 0.6 (B) 0.36 (C) 0.48 (D) 0.18

$\because \sigma = \sqrt{npq}$, $n = 4$, $P = 0.9$, $q = 0.1$

$\therefore \sigma = \sqrt{4 \times 0.9 \times 0.1} = 0.6$

(6) إذا ورد في أحد الأيام 150 شيك ، فما هو متوسط عدد الشيكات التي بدون رصيد ؟

(A) 135 (B) 100 (C) 15 (D) 75

$\because \mu = nP$, $n = 150$, $P = 0.5$

$\therefore \mu = 150 \times 0.5 = 75$