

1.3

New Functions From old Functions

In this section we start with The basic function and obtain New functions by

1-Combining Function

We look at the main ways functions are combined or transformed to form new functions.

- Combining functions Algebraically

جمع
طرح
ضرب

$$1- \left(f \pm g \right) (x) = f(x) \pm g(x)$$

$$** D \left(f \pm g \right) = D f \cap D g \quad \text{المجال هو تقاطع مجال الدالتين}$$

قسمة

$$2- \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{where } g(x) \neq 0$$

$$** D \left(\frac{f}{g} \right) = D f \cap D g \quad \text{ما عدا } \{g(x) = 0\}$$

المجال هو تقاطع مجال الدالتين ما عدا أصفار المقام.

Ex-If: $f(x) = \sqrt{x}$ and $g(x) = \sqrt{1-x}$

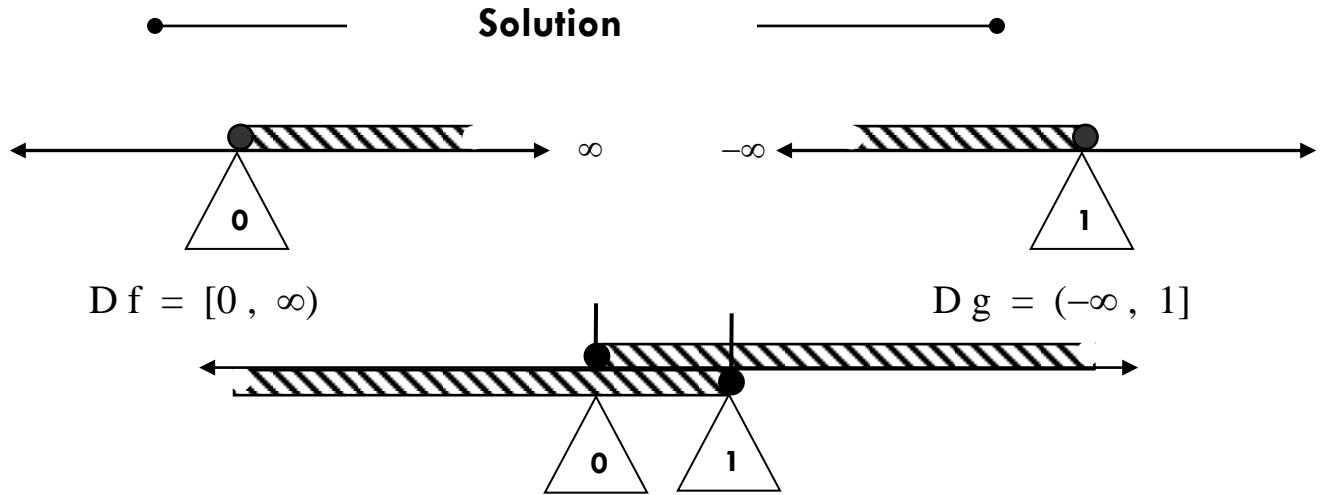
Find: (1) $(f + g)(x)$

(2) $(f - g)(x)$

(3) $(f \cdot g)(x)$

(4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

and Domain of each.



$$(1) (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$$

$$(2) (f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$$

$$(3) (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} = \sqrt{x - x^2}$$

$$\bullet D\left(f \frac{+}{\times} g\right) = Df \cap Dg = [0, \infty) \cap (-\infty, 1] = [0, 1]$$

$$(4) \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$$

$$\bullet D\left(\frac{f}{g}\right) = Df \cap Dg - \{\text{أصفار المقام}\} = [0, 1)$$

$$\text{Ex-If: } f(x) = 3x - 3 \text{ \& } g(x) = x^2 - 3x - 4$$

$$\text{Find: (1) } f + g$$

$$(2) f - g$$

$$(3) f \cdot g$$

$$(4) \frac{f}{g}$$

and Domain of each.

●————— Solution —————●

$$(1) (f + g)(x) = (3x - 3) + (x^2 - 3x - 4) = x^2 - 7$$

$$(2) (f - g)(x) = (3x - 3) - (x^2 - 3x - 4) = -x^2 + 6x + 1$$

$$(3) (f \cdot g)(x) = (3x - 3) \cdot (x^2 - 3x - 4) = 3x^3 - 12x^2 - 3x + 12$$

$$\bullet D\left(f \frac{+}{\times} g\right) = Df \cap Dg = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

$$(4) \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x - 3}{x^2 - 3x - 4}$$

أصفار المقام

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad , \quad (x - 4)(x + 1) = 0 \quad , \quad \therefore x = 4 \text{ \& } x = -1$$

$$\bullet D\left(\frac{f}{g}\right) = Df \cap Dg - \{4, -1\}$$

$$= \mathbb{R} - \{4, -1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, \infty)$$

2-Composition of Functions

تحصيل الدوال

If: f and g are functions , The composition functions

$$* (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$* D(f \circ g) = D \text{ الناتج } \cap D g \text{ الدالة الثانية}$$

$$\text{Ex-If: } f(x) = \sqrt{x-1} \text{ and } g(x) = x^2 + 1$$

1-Find $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

نعوض بكل الدالة الأخيرة مكان كل x في الدالة الأولى

$$= \sqrt{x^2 + 1 - 1}$$

$$= |x|$$

2- Find $(g \circ f)(x)$

نعوض بكل الدالة الأخيرة مكان كل x في الدالة الأولى

$$= (\sqrt{x-1})^2 + 1$$

$$= x - 1 + 1$$

$$= x$$

if: $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \sin x$

$$1- (f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x$$

$$2- (h \circ g)(x) = \sin \sqrt{x}$$

$$3- (f \circ h)\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

بالتعويض بـ 30 في دالة h ثم الناتج يعوض به في دالة f

$$(\sin 30)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$4- (f \circ h)\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \frac{\pi}{3} = 60$$

بالتعويض بـ 60 في دالة h ثم الناتج يعوض به في دالة f

$$(\sin 60)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$5- (f \circ g \circ h)(x)$$

بالتعويض بالدالة h مكان كل x في الدالة g ثم التعويض بالناتج مكان كل x في دالة f

$$\sqrt{\sin x}^2 \longleftarrow \sqrt{\sin x}$$

$$\therefore = \sin x \text{ الناتج النهائي}$$

$$6- (g \circ f)(4)$$

بالتعويض بالعدد 4 في دالة f ثم الناتج يعوض به في دالة g

$$\therefore = 4 \text{ الناتج النهائي}$$

If: $f(x) = \cos^2(x + 2)$ Find f , g and h

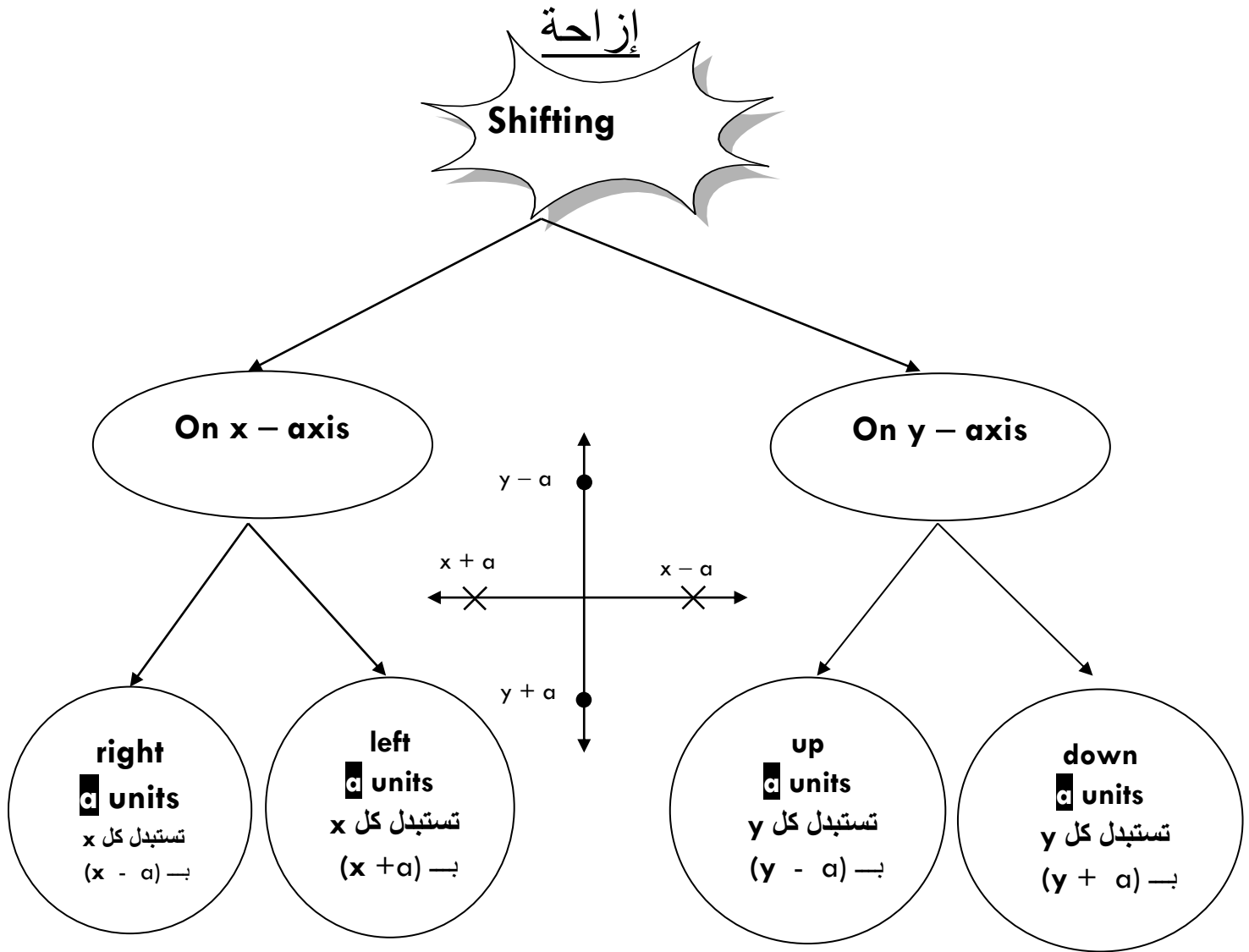
Where $f = f \circ g \circ h$



المعطى هو ناتج التحصيل والمطلوب هو إيجاد الدوال الثلاثة

$f(x) = x^2$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = x + 2$

3-Shifting

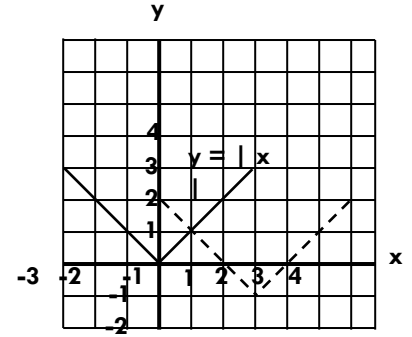


Find an equation for shifted to the new position:

(1) $y = |x|$ $x - 3$ \therefore تحركت يمين 3

$y + 1 = |x - 3|$ $y + 1$ \therefore تحركت لأسفل 1

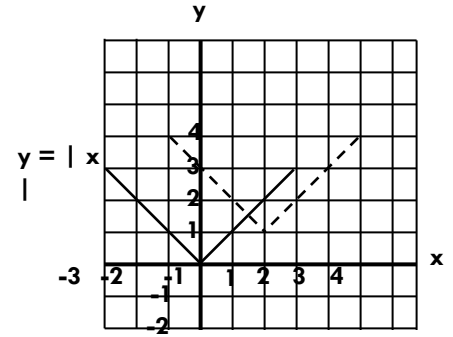
$$y = |x - 3| - 1$$



(2) $y = |x|$ $x - 2$ \therefore تحركت يمين 2

$y - 1 = |x - 2|$ $y - 1$ \therefore تحركت لأعلى 1

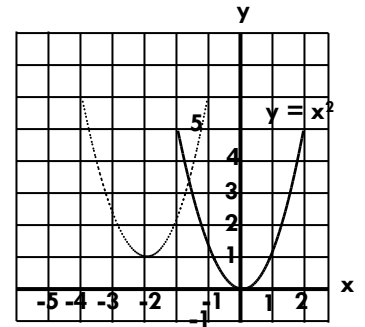
$$y = |x - 2| + 1$$



(3) $y = x^2$ $x + 3$ \therefore تحركت يسار 3

$y - 1 = (x + 3)^2$ $y - 1$ \therefore تحركت لأعلى 1

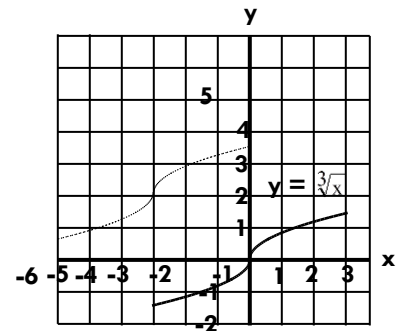
$$y = (x + 3)^2 + 1$$



(4) $y = \sqrt[3]{x}$ $x + 3$ \therefore تحركت يسار 3

$y - 2 = \sqrt[3]{x + 3}$ $y - 2$ \therefore تحركت لأعلى 2

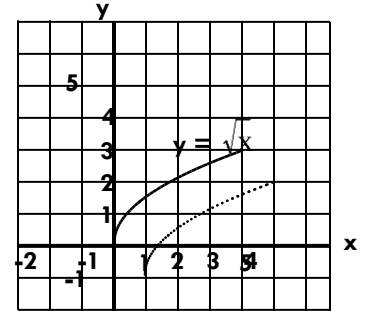
$$y = \sqrt[3]{x + 3} + 2$$



(5) $y = \sqrt{x}$ $x - 1$ \therefore تحركت يمين 1

$y + 1 = \sqrt{x - 1}$ $y + 1$ \therefore تحركت لأسفل 1

$$y = \sqrt{x - 1} - 1$$



Choose the domain of function $y = \sqrt{x - 2}$

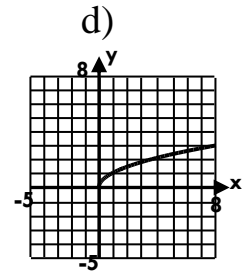
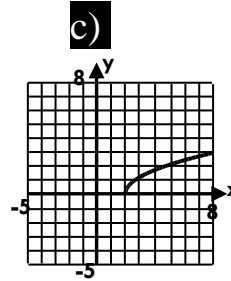
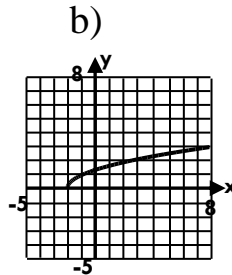
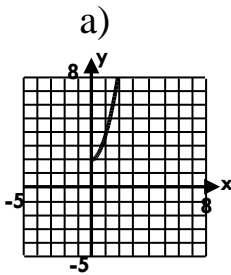
a) $[2, \infty)$

b) $(2, \infty)$

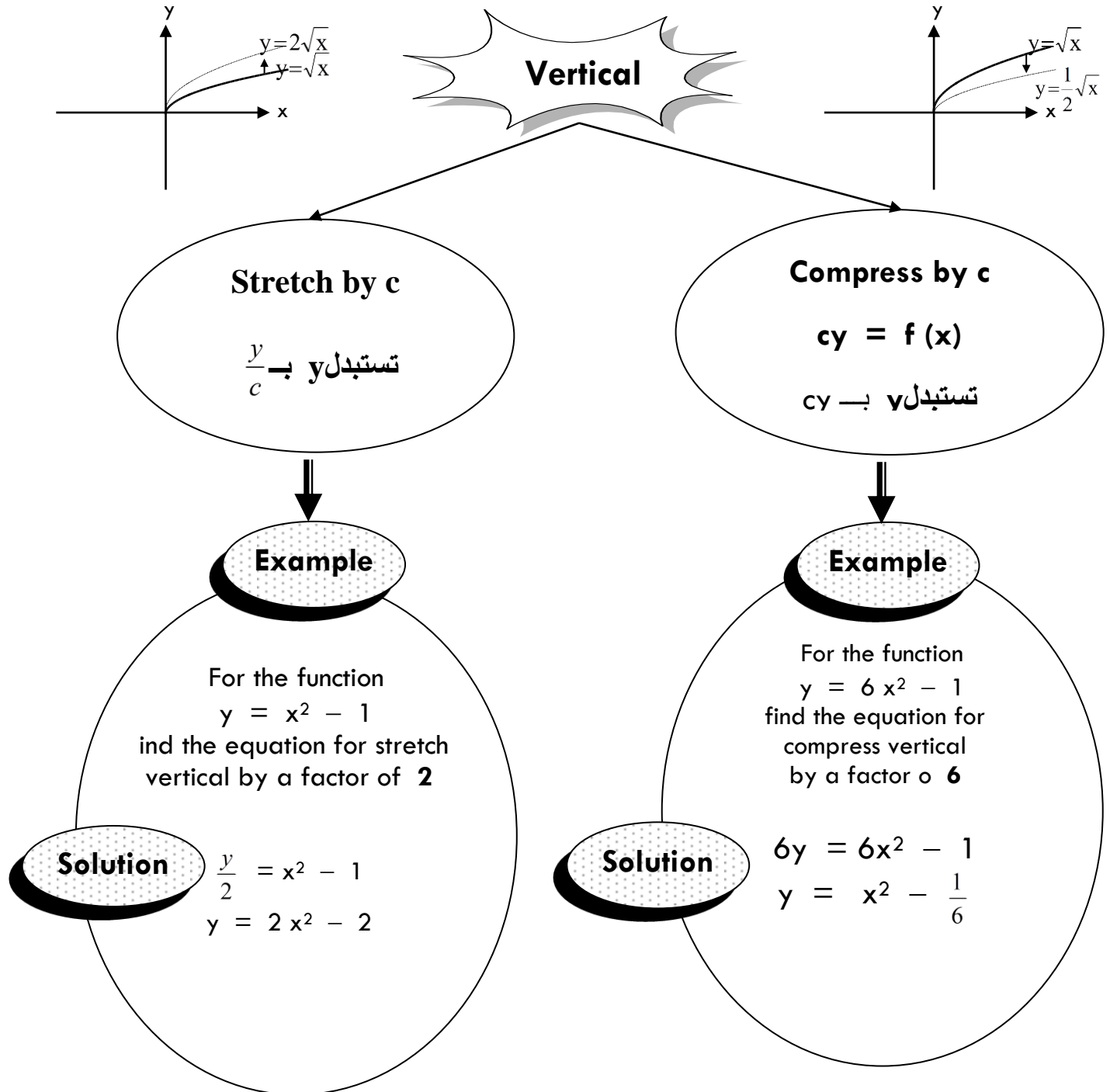
c) $[-2, \infty)$

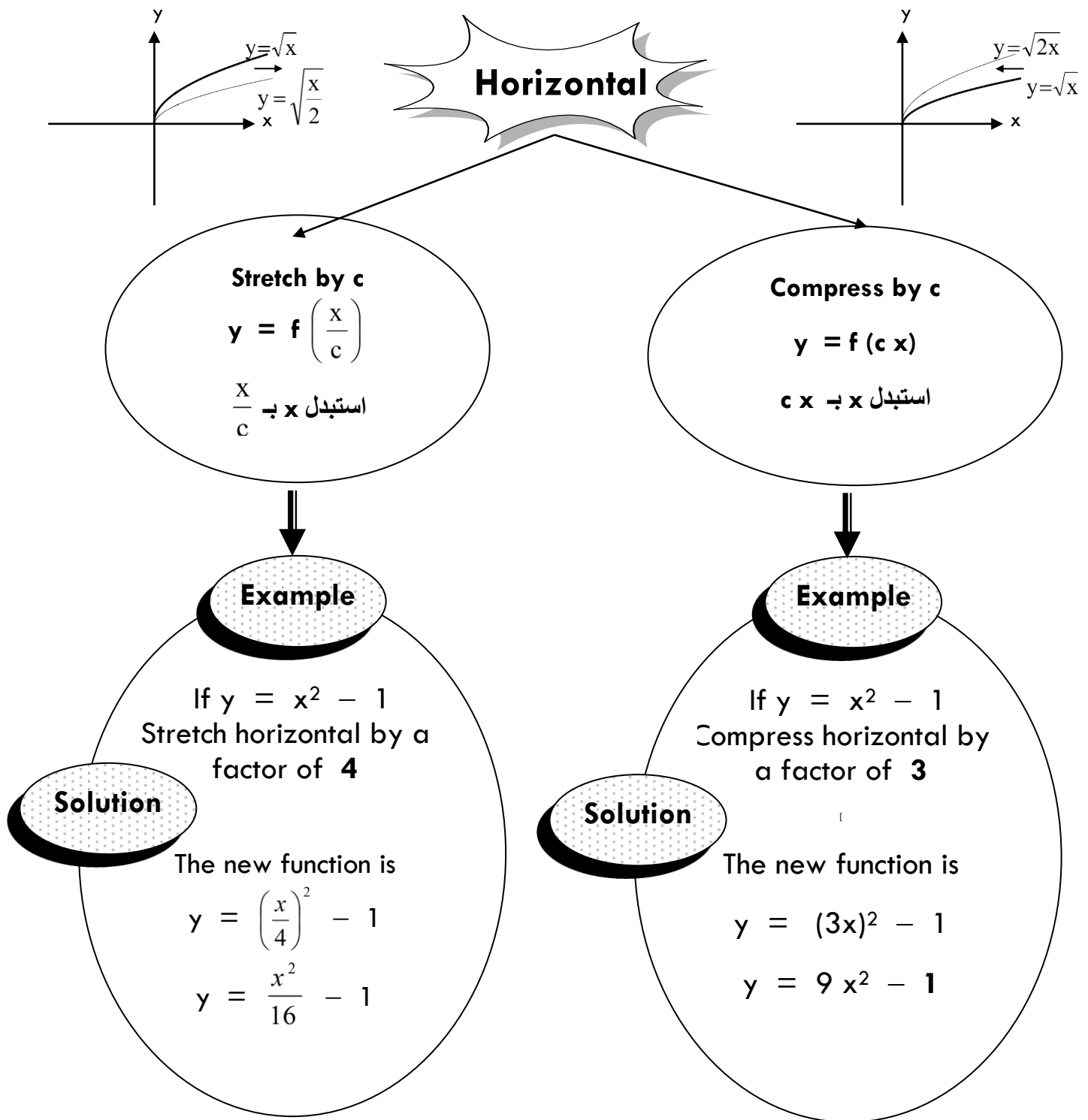
d) $(0, \infty)$

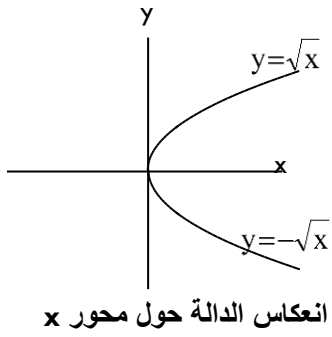
Choose the correct of function.



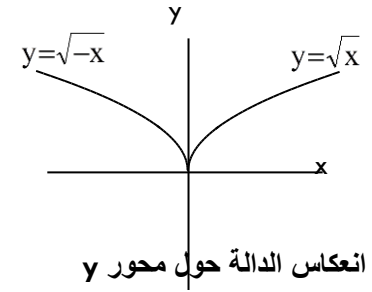
4-Compression and Stretch







Reflected



about x – axis

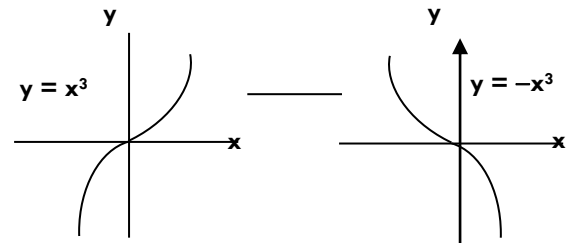
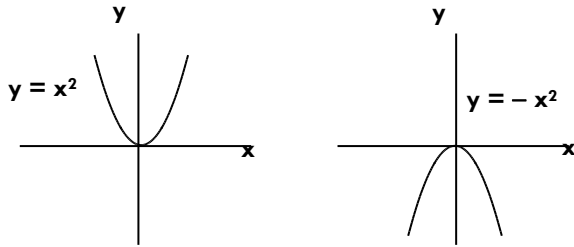
$$y = f(x)$$

نستبدل y بـ $-y$

about y – axis

$$y = f(-x)$$

نستبدل كل x بـ $-x$



Example

If $y = x^2 - 1$
is reflected across x
– axis

The new function is

$$y = -(x^2 - 1)$$

$$y = -x^2 + 1$$

Example

If $y = x^3 + 2x^2$
is reflected across y
– axis

The new function is

$$y = (-x)^3 + 2x^2$$

$$y = -x^3 + 2x^2$$

ملحوظات هامة :- اذا كان مجال الدالة $f(x)$ هو $[a,b]$ والمدى هو $[c,d]$ و k عدد صحيح فان

$F(x)$	Domain	range
$F(x)$	$[a,b]$	$[c,d]$
$F(x+k)$	$[a-k,b-k]$	$[c,d]$
$F(x-k)$	$[a+k,b+k]$	$[c,d]$
$F(kx)$	$[\frac{a}{k}, \frac{b}{k}]$	$[c,d]$
$F(\frac{x}{k})$	$[ka, kb]$	$[c,d]$
$F(x) + k$	$[a,b]$	$[c+k, d+k]$
$F(x) - k$	$[a,b]$	$[c-k, d-k]$
$kF(x)$	$[a,b]$	$[kc, kd]$
$\frac{f(x)}{k}$	$[a,b]$	$[\frac{c}{k}, \frac{d}{k}]$