الاسس والجذور

الأسس

الأس

هو القوة المرفوع اليها العدد بمقدار عدد مرات ضربه في نفسه .

مثال (1)

$5 \times 5 \times 5 = 5^3$

وإذا X عدد حقيقي وكان m عدد طبيعي فإن :

$$X^m = \underbrace{(X)\,(X)\,(X)\,\ldots\ldots\,(X)}_{\text{m من المرات}}$$

حيث X يسمى الأساس وm يسمى الأس

مثال (2)

(1) $X^6 = (X)\,(X)\,(X)\,(X)\,(X)\,(X)$

(2) $(\frac{2}{3})^2 = (\frac{2}{3})\,(\frac{2}{3}) = \frac{4}{9}$

(3) $(\frac{-1}{2})^3 = (-\frac{1}{2})\,(-\frac{1}{2})\,(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}$

(1) $\alpha^0 = 1\,, \quad \alpha \neq 0$

(2) $\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$

(3) $\frac{\alpha^{-n}}{\alpha^{-n}} = \frac{\alpha^{-n}}{\alpha^{-n}}$

(1) $2^0 = 1$, $-2^0 = 1$

(2) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

(3) $\frac{2^{-3}}{5^{-2}} = \frac{5^2}{2^3} = \frac{25}{8}$

(4) $(\frac{-2}{5})^3 = \frac{(-2)^3}{(5)^3} = \frac{-8}{125}$

خــــواص الأسس

كانت X, y أعداد حقيقية و m, n أعداد صحيحة فإن

1. $(X^m)(X^n) = X^{m+n}$

2. $\frac{X^m}{x^n} = X^{m-n}$, $X \neq 0$

3. $(X^m)^n = X^{mn}$

4. $(Xy)^m = X^m y^m$

5. $(\frac{X}{y})^m = \frac{x^m}{y^m}$, $y \neq 0$

مثال (4) :في حاله الضرب نجمع الاسس :

(A) $(5)^8 (5)^{-5} = 5^{8+(-5)} = 5^{8-5} = 5^3 = 125$

(B) $(X+3)^4 (X+3)^3 = (X+3)^{4+3} = (X+3)^7$

مثال (5) :في حاله القسمه نطرح الاسس ونوحد الاساس

(A) $\frac{3^2}{3^{-2}} = 3^{2-(-2)} = 3^{2+2} = 3^4 = 81$

(B) $\frac{(a-b)^7}{(a-b)^4} = (a-b)^{7-4} = (a-b)^3$

مثال (6) :في حاله وجود اسين نضرب ال (2) اس في بعضها

(A) $(X^4)^3 = X^{(4)(3)} = X^{12}$

(B) $((-3)^2)^{-2} = (-3)^{(2)(-2)} = (-3)^{-4} = \frac{1}{81}$

مثال (7) من الممكن توزيع الاس ع ما بداخل القوس

(A) $(Xy)^3 = X^3 g^3$

(B) $(5X^2 y^{-3} z^3)^{-3} = (5)^{-3} (X^2)^{-3} (y^{-3})^{-3} (z^3)^{-3}$

$$= \frac{1}{5^3} \cdot \frac{1}{X^{(2)\,(3)}} \cdot \frac{1}{(y^{-3})^3} \cdot z^{-9} = \frac{1}{125} \cdot \frac{1}{X^6} \cdot y^9 \, \frac{1}{.z^9}$$

مثال (8) :

(A) $(\frac{3}{5})^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

(B) $(\frac{-2}{4})^3 = \frac{(-2)^3}{4^3} = \frac{-8}{64} = \frac{-1}{8}$

مثال (9) : بسط ما يلي :

(A) $\left(\frac{9X^5 \;\; y^4}{3X^3 \;\; y}\right) = \frac{9^2 \; (X^5)^2 \; (y^4)^2}{3^2 \; (X) \; (y)}$

$$= \frac{9^2 \; X^{10} \; y^{8}}{9 \; X^{6} \; y^2} = 9 \; X^{(10-6)} \; y^{(8-2)} = 9\, X^4\, y^6$$

(B) $\left(\frac{-25\, X^3 y^5 z^2}{5\, X^3 y\, z}\right)^{-3} = \frac{(-25)^{-3} (X^3)^{-3} (y^5)^{-3} (z^2)^{-3}}{(5)^{-3} (X^3)^{-3} (y)^{-3} \; z^{-3}}$

$$= \frac{5^3}{(25)^3} = \frac{\cancel{X^{-9}}\, y^{-15} z^{-6}}{\cancel{X^{-9}}\, y^{-3} z^{-3}} = \frac{y}{5^6}\; {}^{-15-(-3)} \; z^{-6-(-3)}$$

$$= -\frac{1}{(25)^3} y^{-15+13}_{\;12} \; z^{-6+3}_{\;3} \quad = \frac{1}{(125)} (y)^{-12} \cdot (z)^{-3} \quad = \frac{1}{(125)(y)\;(z)}$$

الجـــــــذور

الجذر النونى :

يسمى العدد X الجذر النوني للعدد α إذا كان $X^n = \alpha$ ويكتب :

$X=\sqrt[n]{a} \quad =a^{1/n} \quad , \quad a,x \in R$

مثال (10) :

(1) $\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$

(2) $\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$

(3) $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$

(4) $\sqrt{X^8}= \quad =X^{\frac{8}{2}} \quad =X^4$

(5) $\sqrt[3]{-1000} \quad =-\sqrt[3]{10^3} \quad =-10$

(6) $\sqrt{-4}$ غير معرف ($\sqrt{-4} \notin R$)

(7) $\sqrt[6]{-64}$ = غير معرف $\quad \sqrt[6]{-64} \notin R$)

ملحوظه :

إذا كان n عدد زوجياً وكان لدينا $\sqrt[n]{\alpha}$ فإن $\alpha \geq 0$ لأنه إذا كان α سالب فإن الجذر غير معرف في الأعداد الحقيقية .

2. اما اذا كان عدد سالبا وكان لدينا $\sqrt[n]{\alpha}$ فان $\alpha \geq 0$

خـــواص الجـــــــذور

إذا كان X ، y أعداداً حقيقية و n, m أعداد صحيحة بحيث أن $1 < n$ فإن :

الخاصية الأولى :

$$(\sqrt[n]{X})^{n} = |x|$$

حيث n عدد زوجي ، $n \geq 2$

مثال (11) :

(2) $\sqrt[4]{X^4} = |x|$

(1) $\sqrt{y} = |y|$

(3) $\sqrt{(-4)} = |-4| = 4$

الخاصية الثانية :

$$(\sqrt[n]{X^n}) = X$$

حيث n عدد فردي $n \geq 3$

مثال (12) :

(1) $\sqrt[5]{X^5} = X$

(2) $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^{-5}} = -2$

الخاصية الثالثة :

$$\sqrt[n]{X\,y} = \sqrt[n]{X} \times \sqrt[n]{y}$$

حيث أن n $X , y \geq 0$
إذا كانت n عدداً زوجياً

مثال (13) :

(1) $\sqrt{t}\ \sqrt{t} = |\,t\,|$

(2) $\sqrt{X\,y} = \sqrt{X}\,\sqrt{y}$

(3) $\sqrt[3]{27\,X^{18}} = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{X^{18}} = 3\,X^6$

ا

الخاصية الرابعة :

$\sqrt[n]{\frac{X}{y}} = \frac{\sqrt[n]{X}}{\sqrt[n]{y}}$, $y \neq 0$

حيث $(X \geq 0 , \quad y \geq 0)$ إذا كانت n عدداً زوجياً)

مثال (14) :

(1) $\sqrt[3]{\frac{16\,t\,7}{2\,t\,4}} = \sqrt[3]{8\,t^3} = \sqrt[3]{8}\ \sqrt[3]{t^3} = 2t$

(2) $\sqrt{\frac{4\,X\,6}{9\,X\,4}} = \frac{\sqrt{4\,X\,6}}{3\,X\,4} = \frac{2\,X^3}{3\,X^2} = \frac{2}{3}X$

الخاصية الخامسة :

$\sqrt[n]{X^4} = (\sqrt[n]{X})^m = (X^{\frac{1}{n}})^m = X^{\frac{m}{n}}$

حيث m , n أكبر من الواحد .

مثال (15) :

(1) $\sqrt{X^4} = X^{4/2} = X^2$

(2) $\sqrt[3]{X^6 y^6} = X^{\frac{6}{3}} \cdot y^{\frac{6}{3}} = X^2$

(3) $\sqrt[3]{\frac{16\,X^{17}\,y^3\,z}{2\,X^2\,z^7}} = \sqrt[3]{\frac{8\,X^{15}\,y^3}{z^6}} = \frac{2\,X^5\,y}{z^2}$

الخاصية السادسة :

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{X}} = \sqrt[nm]{X}$$

حيث $X \geq 0$ ، n , m عدداً زوجياً .

مثال (16) :

(1) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$

(2) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{y}} = \sqrt[15]{y} = y^{1/15} = \sqrt[15]{y}$

(3) $\sqrt[6]{343} = \sqrt{\sqrt[3]{343}} = \sqrt{\sqrt[3]{7^3}} = \sqrt{7}$

مثال (17) : **اختر الإجابة الصحيحة :**

(1) $2\ X^2\ (3X^3) =$

(A) $6\ X^6$ (B) $9\ X^6$ (C) $\boxed{6\ X^5}$ (D) $5\ X^5$

(2) $\frac{8\ X^8}{4\ X^4} =$

(A) $\boxed{2\ X^4}$ (B) $4\ X^2$ (C) $2\ X^2$ (D) $4\ X^4$

(3) $(3\ X^4\ y^3)^2 =$

(A) $3\ X^8\ y^6$ (B) $\boxed{9\ X^8\ y^6}$ (C) $9\ X^{16}\ y^9$ (D) $6\ X^{16}$

(4) $3X^{-1} =$

(A) $\frac{1}{2X}$ (B) $\boxed{\frac{3}{X}}$ (C) $2\ X$ (D) $\frac{-2}{X}$

(5) $X^{-1} + y^{-1} =$

(A) $\frac{1}{X+y}$ (B) $\frac{X\,y}{X+y}$ (C) $-(X+y)$ (D) $\frac{X+y}{X\,y}$

(6) $X^{m}\,X^{n} = X^{n+m}$

(A) صواب (B) خطأ

(7) $\sqrt{6\,X^{2}} = 3\,X$

(A) صواب (B) خطأ

(8) $\left(\frac{6}{2}\right)^{0} = 3$

(A) صواب (B) خطأ

(9) $\frac{b^{-n}}{\alpha^{-m}} = \frac{b^{n}}{\alpha^{m}}$

(A) صواب $\boxed{\text{(B) خطأ}}$

(10) $\frac{25\,X^{5}\;\;y^{4}}{25\,X^{3}\;\;y}$

(A) $25\,X^{2}\,y^{3}$ (B) $5\,X^{3}\,y^{2}$ $\boxed{(C)\ X^{2}\,y^{3}}$ (D) $5\,X^{8}\,y$

مثال (18) : بسط المقادير التالية :

A) $(2)^{2}\,(2)^{4} = 2^{2+4} = 2^{6}$

(B) $\frac{X^{2}\;\;y^{6}\;\;z^{3}}{X^{3}\;\;y^{5}\;\;z^{5}} = X^{2-3}\;\;y^{6-5}\;\;z^{3-5} = X^{-1}\;\;y\;\;z^{-2} = {}_{2}\frac{y}{X\,Z}$

$\frac{-3}{2} + \frac{5}{2}$ $\frac{2}{2}$

(C) $(2x^{\frac{-3}{2}})\ (3x^{\frac{5}{2}}) = 6\ X \qquad = 6\ X \qquad = 6\ X$

(D) $(\frac{x^4\ \ y^3}{z^4}) \div (\frac{x^3\ \ y}{z^2})^3 = \frac{x^4\ .\ y^3\ .\ z^{-4}}{(x^3\ .\ y\ .\ z^{-2}\ )^3} = \frac{x^4\ .\ y^3\ .\ z^{-4}}{x^9\ .\ y^3\ .\ z^{-6}} =$

$=X^{4-9}\ Z\text{-}^{4+6}\ \ y^{3-3}$

$= X^{-5}\ \ y^0\ \ Z^2 = \frac{z^2}{x^5}$

(E) $2X^2\ y^3\ (Xy)^3 = 2\ X^2\ y^3\ X^3\ y^3 = 2\ X^{2+3}\ y^{3+3} = 2\ X^5\ y^6$

مثال (19) : أوجد قيمة المقادير التالية :

(1) $32^{-3} = \frac{1}{32^3} = \frac{1}{(2^5)^3} = \frac{1}{2^{15}} = \frac{1}{32768}$

2

(2) $\sqrt{49} = \sqrt{7} = 7$

3

(3) $(\frac{2}{3})^{-3} = (\frac{3}{2})^3 = \frac{3}{2^3} = \frac{27}{8}$

(4) $(2^0)\ (2^{-2}) = (1)\ \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

(5) $(\sqrt[3]{27\ X})^6 = \sqrt[3]{27}\ .\ \sqrt[3]{X} = (\sqrt[3]{3}\ )^3\ .\ \sqrt[3]{X}^{\ 6} = 3\ \ X^{6/3} = 3\ X^2$

(6) $(3^2 \times 2^{-3})^{-2} = (3^2)^{-2}\ (2^{-3})^{-2} = (3)^{-4}\ (2)^{6} = \frac{2^6}{3^4} = \frac{64}{81}$

(7) $\left[\frac{x^{-2}(a+b)^4}{x^2\ \ (a+b)}\right]^3 = \left[x^{-2-2}\ (a+b)^{4-2}\right]^3 = \left[x^{-4}\ (a+b)^2\right]^3$

$= x^{-12}\ (a+b)^6 = \frac{(a+b)^6}{x^{12}}$

(8) $\sqrt[3]{\frac{16\,X\ \ y^2\ \ z}{2X^2\ \ y^5\ \ z}} = \sqrt[3]{8\,X^3\ \ y^{-3}} = \sqrt[3]{\frac{8\,X^3}{y^3}} = \frac{\sqrt{8\,X^3}}{\sqrt{y^3}} = \frac{2\,X}{y}$

(9) $\sqrt[3]{\sqrt{64\,X^{18}\ \ y^{12}}} = \sqrt[3]{8x^{\frac{18}{2}}\ \ y^{\frac{12}{2}}} = \sqrt[3]{8\,X^9\ \ y^6}$

$= \sqrt[3]{2^3\ \ X^9\ \ y^6} = (2)^{3/3}\ \ (X)^{9/3}\ \ (y)^{6/3} = 2\,X^3\,y^2$

(10) $(7^6)^{\frac{1}{6}}$ = ...

(A) 0 (B) 1 (C) 7^{12} $\boxed{\text{(D) } 7}$