المصفوفات

مقدمة

تعريف :

المصفوفة هي ترتيب لعناصر أو متغيرات في شكل مستطيل ويرمز لها بالحروف الكبيرة A , B, ... بينما يرمز للعناصر بالحروف الصغيرة a , b , ... وتوضع بين ( ) , [ ] .

تعريف :

رتبة المصفوفة التي عدد صفوفها m وعدد أعمدتها n وتكتب على الصورة $m \times n$

a_{ij} ترمز للعنصر الذي يقع في الصف i والعمود j حيث :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

i = 1 , 2 , ... , m $\quad 1 \le i \le m$

j = 1 , 2 , ... , n $\quad 1 \le j \le n$

المصفوفة A من الرتبة $m \times n$ أي تحتوي على m من الصفوف و n من الأعمدة .

مثال 1

أوجد رتبة المصفوفات التالية :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

الحل

حيث أن عدد صفوف المصفوفة A يساوي 3 وعدد أعمدتها يساوي 2 اذا رتبة المصفوفة A هي 2×3

$$B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

الحل

حيث أن عدد صفوف المصفوفة B يساوي 3 وعدد أعمدتها يساوي 1 اذا رتبة المصفوفة B هي 1×3

$$c = \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ e & 7 & c \end{pmatrix}$$

الحل

حيث أن عدد صفوف المصفوفة C يساوي 2 وعدد أعمدتها يساوي 3 اذا رتبة المصفوفة C هي 3×2

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

الحل

حيث أن عدد صفوف المصفوفة D يساوي 1 وعدد أعمدتها يساوي 3 اذا رتبة المصفوفة D هي 3×1

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 6 \\ 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

الحل

حيث أن عدد صفوف المصفوفة E يساوي 3 وعدد أعمدتها يساوي 3 اذا رتبة المصفوفة E هي 3×3

المصفوفة المستطيلة :

هي مصفوفة عدد صفوفها لا يساوي عدد أعمدتها أي أن $m \neq n$

المصفوفة المربعة :

هي مصفوفة عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها أي أن $m = n$
وتأخذ الشكل

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

وتكون رتبتها $n \times n$

مصفوفة الصف :

هي مصفوفة تحتوي على صف واحد فقط وأي عدد من الأعمدة
وتأخذ الشكل

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

وتكون رتبتها $1 \times n$

مصفوفة العمود :

هي مصفوفة تحتوي على عمود واحد فقط وأي عدد من الصفوف

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

وتكون رتبتها $1 \times n$

المصفوفة الصفرية :

هي مصفوفة مستطيلة أو مربعة وجميع عناصرها أصفار ويرمز لها بالرمز O .

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

المصفوفة القطرية :

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ماعدا القطر الرئيسي .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

القطر الرئيسي :

عناصره على الشكل i = j أي أن (رقم الصف = رقم العمود) .

المصفوفة القياسية :

المصفوفة القياسية هي المصفوفة القطرية التي جميع عناصرها متساوية مثل

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

مصفوفة الوحدة :

هي مصفوفة مربعة (قطرية) جميع عناصرها أصفار ماعدا القطر الرئيسي عناصره تحتوي على الواحد الصحيح ويرمز لها بالرمز I

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مدور المصفوفة :

اذا كانت A مصفوفة من رتبة $n \times m$ فاننا نحصل على مدور المصفوفة بجعل الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف فانه ينتج مصفوفة أخرى من رتبة $m \times n$ والمصفوفة الناتجة تسمى بمدور المصفوفة A (Transpose) ويرمز لها بالرمز A^T .

مثال 2

أوجد مدور المصفوفات التالية :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

الحل:

نحصل على مدور المصفوفة بجعل الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف في المصفوفة المعطاة

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

الحل

$$B^T = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & a & 4 \\ e & 2 & c \end{pmatrix}$$

الحل :

$$C^T = \begin{pmatrix} 3 & e \\ a & 2 \\ 4 & c \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$D^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 8 \\ 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$E^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & 9 \\ 3 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

نتيجة :

اذا كانت A مصفوفة من رتبة $m \times n$ فان $(A^T)^T = A$

\

1) تساوي المصفوفات

تعريف :

يقال للمصفوفتين $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ انهما متساويتان أي $A = B$ اذا تحقق :

1) رتبة المصفوفة A تساوي رتبة المصفوفة B .

2) العناصر المتناظرة متساوية أي أن $a_{ij} = b_{ij}\ \forall\ i\ ,j$

مثال 3

اذا كانت $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وكانت $A = B$

فأوجد قيمة المتغيرات y , x

الحل:

حيث أن

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

فان $x = 1$, $y = 2$.

مثال 4

أوجد قيمة x , y اذا كان $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ x & 3 \end{pmatrix}$

الحل:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ x & 3 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & x \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

فان x = 2 , y = 3 .

مثال 5

أوجد قيمة المتغيرات a , b , c , d , e , f , g , h اذا كان

$$\begin{pmatrix} a & 3 & -5 \\ c & 4 & d \\ 2 & 7 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & b & f \\ -3 & h & 8 \\ e & g & k \end{pmatrix}$$

الحل :

حيث أن المصفوفتان متساويتان فان العناصر المنتاظرة متساوية

فان

a = 9 , b = 3 , c = -3 , d = 8 , e = 2 , f = -5 , g = 7 , h=4, k=15

2) جمع المصفوفات :

اذا كانت $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ، $B = (b_{ij})_{m\times n}$ (رتبة المصفوفة A تساوي رتبة المصفوفة B) فان حاصل جمع المصفوفتين A , B يعرف كما يلي بانه المصفوفة $C = (c_{ij})_{m\times n}$ حيث رتبة المصفوفة C هي نفس رتبة كل من المصفوفتين A , B وأن $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ لجميع قيم i , j وفي هذه الحالة نكتب

A + B = C

3) طرح المصفوفات :

اذا كانت $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ، $B = (b_{ij})_{m\times n}$ (رتبة المصفوفة A تساوي رتبة المصفوفة B) فان حاصل طرح المصفوفة B من المصفوفة A يعرف كما يلي بانه المصفوفة $C = (c_{ij})_{m\times n}$ حيث رتبة المصفوفة C هي نفس رتبة كل من المصفوفتين A , B وأن $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ لجميع قيم i , j وفي هذه الحالة نكتب

A – B = C

مثال 6

اذا كانت $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

فأوجد A + B و A - B

الحل :

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+(-4) & 3+1 \\ -1+6 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-(-4) & 3-1 \\ -1-6 & 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$$

مثال 7

اذا كانت $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

فأوجد A + B و A - B

الحل :

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 9 \\ 5 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

خصائص عملية جمع المصفوفات

نفرض أن A , B , C مصفوفات لهم نفس الرتبة وأن المصفوفة الصفرية O لها نفس الرتبة فان :

جمع المصفوفات ابدالي	A + B = B + A
جمع المصفوفات تجميعي	A + (B + C) = (A + B) + C
المحايد الجمعي	A + O = O + A = A
المعكوس الجمعي	A + (- A) = O
مدور مجموع مصفوفتان	$(A + B)^T = A^T + B^T$

مثال 8

اذا كانت

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

أوجد $(A+B)^T$ ؟

الحل :

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 6 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

حل آخر :

$$(A+B)^T = A^T + B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

4) ضرب المصفوفة فى ثابت k :

اذا كانت لدينا $A = (a_{ij})_{m \times n}$, k عدد حقيقي فان حاصل ضرب k في المصفوفة A نحصل عليه بضرب k في جميع عناصر A أي أن :

$$kA = (ka_{ij})_{m \times n}$$

مثال 9

اذا كانت $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

فأوجد $5A$, $-4A^T$

الحل :

$$5A = 5\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -15 & 10 \\ -5 & 30 & 0 \end{pmatrix}$$

حيث أن

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

اذا

$$-4A^T = -4\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 4 \\ 12 & -24 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

مثال 10

اذا كانت

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

فأوجد 3A , -2B , 3A – 2B

الحل:

$$3A = 3\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-2B = -2\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 15 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 23 & -8 \\ -15 & 6 \end{pmatrix}$$

5) ضرب المصفوفات :

اذا كان لدينا المصفوفة $A = (a_{ij})_{m\times n}$ والمصفوفة $B = (b_{ij})_{n\times p}$ فان حاصل الضرب $AB = (c_{ij})_{m\times p}$ يكون مصفوفة من الرتبة $m \times p$ حيث

$c_{ij} = \sum_{k-1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ أي أنه لكي يكون الضرب ممكنا ينبغي أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساويا لعدد صفوف المصفوفة الثانية أي أن

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

على سبيل المثال

$$A_{2\times 3} \times B_{3\times 2} = C_{2\times 2}$$

=

مثال 11

اذا كان لدينا ثلاث مصفوفات على النحو التالي :

$$A_{2\times3}\ ,B_{3\times4}\ ,C_{4\times2}$$

ابحث عن امكانية العمليات الاتية :

AB (1

حيث أن عدد أعمدة المصفوفة A تساوي 3 وعدد صفوف المصفوفة B تساوي 3 فان عملية الضرب AB ممكنة وينتج

$$A_{2\times3}\ B_{3\times4} = D_{2\times4}$$

BA (2

حيث أن عدد أعمدة المصفوفة B تساوي 4 وعدد صفوف المصفوفة A تساوي 2 فان عملية الضرب BA غير ممكنة .

BC (3

حيث أن عدد أعمدة المصفوفة B تساوي 4 وعدد صفوف المصفوفة C تساوي 4 فان عملية الضرب BC ممكنة وينتج

$$B_{3\times4}\, C_{4\times2} = F_{3\times2}$$

CA (4

حيث أن عدد أعمدة المصفوفة C تساوي 2 وعدد صفوف المصفوفة A تساوي 2 فان عملية الضرب CA ممكنة وينتج

$$C_{4\times2}\, A_{2\times3} = H_{4\times3}$$

AC (5

حيث أن عدد أعمدة المصفوفة A تساوي 2 وعدد صفوف المصفوفة C تساوي 4 فان عملية الضرب AC غير ممكنة

مثال 12

اذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

فأوجد BA , AB ان أمكن

الحل:

حيث أن عددد أعمدة المصفوفة A تساوي 2 وعدد صفوف المصفوفة B تساوي 2 فان عملية الضرب AB ممكنة

$$\begin{pmatrix} (1)(4) + (2)(5) & (1)(3) + (2)(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \end{pmatrix}$$

اذا

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

وحيث أن عدد أعمدة المصفوفة B تساوي 2 وعدد صفوف المصفوفة A تساوي 1 فان عملية الضرب BA غير ممكنة .

مثال 13

اذا كان $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

فأوجد BA , AB

ان أمكن

الحل :

حيث أن عدد أعمدة المصفوفة A تساوي 3 وعدد صفوف المصفوفة B تساوي 3 فان عملية الضرب AB ممكنة

اذا

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1)(1) + (0)(-2) + (-1)(-1) & (1)(0) + (0)(1) + (-1)(-3) \\ (2)(1) + (3)(-2) + (-2)(-1) & (2)(0) + (3)(1) + (-2)(-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 0 + 1 & 0 + 0 + 3 \\ 2 + (-6) + 2 & 0 + 3 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

حيث أن عدد أعمدة المصفوفة B تساوي 2 وعدد صفوف المصفوفة A تساوي 2 فان عملية الضرب BA ممكنة

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1)(1)+(0)(2) & (1)(0)+(0)(3) & (1)(-1)+(0)(-2) \\ (-2)(1)+(1)(2) & (-2)(0)+(1)(3) & (-2)(-1)+(1)(-2) \\ (-1)(1)+(-3)(2) & (-1)(0)+(-3)(3) & (-1)(-1)+(-3)(-2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -7 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن AB مصفوفة من رتبة 2×2 بينما BA من رتبة 3×3 أي أن

$$AB \neq BA$$

من الأمثلة السابقة نجدأن ضرب المصفوفات ليس ابداليا .

ضرب المصفوفات تحقق العلاقات الآتية :

1) $A(B+C) = AB + AC$

2) $A(BC) = (AB)C$

3) $AI = IA = A$

حيث I مصفوفة الوحدة .

المصفوفة المتماثلة :

المصفوفة المربعة A تسمى مصفوفة متماثلة اذا كان $A^T = A$ فمثلا

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & h \\ e & h & c \end{pmatrix}$$

المصفوفة شبه المتماثلة :

المصفوفة المربعة A تسمى مصفوفة شبه متماثلة اذا كان $A^T = -A$ فمثلا

$$A = \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ -d & 0 & h \\ -e & -h & 0 \end{pmatrix}$$

مثال 14

بين نوع المصفوفة من حيث كونها متماثلة أو شبه متماثلة أو خلاف ذلك :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad (1$$

نقوم بايجاد مدور المصفوفة كالآتي

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

حيث أن $A^T = A$ وبالتالي فان المصفوفة A متماثلة .

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (2$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -B$$

حيث أن $B^T = -B$ وبالتالي فان المصفوفة B شبه متماثلة.

(3 $E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

$$E^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 0 & -6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

حيث أن $-E \neq E^T$ وبالتالي فان المصفوفة E ليست متماثلة وليست شبه متماثلة .