المحددات

المقدمة

لتكن A مصفوفة مربعة من رتبة $(n \times n)$ فان محدد المصفوفة A يعطي التالي :

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ويرمز له $\Delta = |a_{ij}|_n$

حيث أنه في a_{ij} يرمز الدليل الأول لرقم الصف

والدليل الثاني لرقم العمود الذي يقع فيه العنصر a_{ij} .

فمثلا :

العنصر a_{11} يقع في الصف الأول والعمود الأول .

العنصر a_{23} يقع في الصف الثاني والعمود الثالث .

عناصر القطر الرئيسي في المحدد هي $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$

يمكن ايجاد قيمة المحدد الذي رتبته " 3 " باستخدام عناصر الصف الثاني .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$$

مثال 2

أوجد رتبة وقيمة المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

الحل:

حيث أن المحدد يحتوي على صفين وعمودين فان رتبة المحدد تساوي 2

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (4)(6) - (-2)(5) = 24 - (-10) = 24 + 10 = 34$$

مثال 3

أوجد رتبة المحدد

$$\Delta=\begin{vmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

الحل:

حيث أن المحدد يحتوي على ثلاث صفوف وثلاث أعمدة فان رتبة المحدد تساوي 3 سنقوم بايجاد قيمة المحدد وذلك باستخدام عناصر الصف الأول

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-7)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$= -2\ (0 - 8)\ -3\ (0 - 12)\ -7\ (2 - 9\ ) = 16 + 36 + 49 = 101$

ملاحظة (1)

عند ايجاد قيمة المحدد يستحسن أن نستخدم عناصر الصف (العمود) الذي يحتوي على أصفار أكثر وذل لتسهيل الحسابات .

مثال 4

أوجد قيمة المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل:

حيث أن العمود الثاني يحتوي على أصفار سنقوم بفك المحدد باستخدام عناصر العمود الثاني

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-2)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-2-2) = -8$$

قاعدة :

طريقة الأقطار المتوازية سارس :

نكتب عناصر المحدد كما هي ثم نضيف على يمينها مباشرة العمود الأول ثم العمود الثاني .
فينتج لدينا خمسة أعمدة وثلاث صفوف كما يلي

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

وتكون قيمة المحدد مساوية :

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{21}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

مثال 5

أوجد قيمة المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (3)\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=(-3-4)+2(-2-2)+3(-4-(-3))= -7+2(-4)+3(-1)= -7 -8 -3 = -18$$

ويمكن ايجاد قيمة المحدد باستخدام طريقة الأقطار المتوازية كالآتي:

$$\Delta = \left|\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$=(1)(-3)(1)+(-2)(2)(1)+(3)(-2)(2)-(3)(-3)(1)$$

$$-(1)(2)(2)-(-2)(-2)(1)$$

$$=-3 +(-4)+(-12)-(-9)-4-(4)$$

$$=-3 -4 -12 +9 -4 -4= -18$$

نتيجة :

$$(A)\quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

$$(B)\quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

$$(A)\quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

وبالتالي قيمة المحددات التي على الصور السابقة تساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي.

مثال 6

أوجد قيمة المحددات الآتية :

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -5 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 6\end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_2=\begin{vmatrix}-3 & 6 & -9\\ 0 & -1 & 10\\ 0 & 0 & 9\end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_3=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 9\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}$$

الحل :

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -5 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 6\end{vmatrix}=(1)(2)(6)=12$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}-3 & 6 & -9\\ 0 & -1 & 10\\ 0 & 0 & 9\end{vmatrix}=(-3)(-1)(9)=27$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 9\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=(-2)(4)(4)=-32$$

خواص المحددات

فيما يلي سنذكر بعض الخواص الأساسية للمحددات

1) قيمة المحدد لا تتغير اذا صارت الأعمدة صفوفا والصفوف أعمدة أي أن

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

2) تبديل صفين (أو عمودين) متتاليين لمحدد لا يغير من قيمة المحدد بل يغير من اشارة المحدد فقط أي أن

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

نتيجة :

اذا احتوى المحدد على صفين (عمودين) متطابقين فانه يساوي صفر (ينعدم المحدد اذا تساوى فيه صفين أو عمودين).

كمثال $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

3) اذا ضرب أي صف (أي عمود) لمحدد في "k" فان قيمة المحدد الناتج تساوي "k" مضروبا في قيمة المحدد الأصلي

كمثال

$$\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

نتيجة :

يمكن أخذ عامل مشترك بين جميع عناصر أي صف أو أي عمود .

كمثال :

$$(A)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -5 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$(B)\begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 5 & 15 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

4) اذا ضربت مكونات أي صف (أي عمود) في عدد معين وجمعت على المكونات المناظرة لصف (عمود) آخر فان قيمة المحدد لا تتغير .

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & a_2 + kb_2 & a_3 + kb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

5) اذا كانت مكونات أي صف (أي عمود) في محدد تساوي صفر فان قيمة المحدد تساوي صفر.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

مثال 7

احسب قيمة المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

الحل :

الصف الثاني نطرح منه ضعف الصف الأول،الصف الثالث نطرح منه ثلاثة أمثال الصف الأول ينتج أن

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 14 = 16$$

مثال 8

احسب قيمة المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -5 & -5 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

الحل:

بأخذ 2 عامل مشترك من الصف الأول نجد أن

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & -5 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

وحيث أن عناصر العمود الأول والثالث متساوية فان $\Delta = 0$

مثال 9

احسب قيمة المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

الحل:

بأخذ 2 عامل مشترك من الصف الأول نجد أن

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

وحيث أن عناصر الصف الأول والثالث متساوية فان $\Delta = 0$

ملاحظة:

محدد المصفوفة المربعة يساوي محدد مدور المصفوفة.

$$det(A) = det\,(A^T)$$