المعكوس الضربي للمصفوفات

1) المصفوفة المفردة وغير المفردة :

لأي مصفوفة مربعة A من الرتبة $(n \times n)$ ، يقال انها غير مفردة اذا كان محدد المصفوفة A الذي رتبته (n) لا يساوي الصفر أي أنه :

$$det\,(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

أما اذا كان محدد المصفوفة A الذي رتبته (n) يساوي الصفر فان المصفوفة A تسمى مصفوفة مفردة أي أنه :

$$det\,(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

وتلعب المصفوفة غير المفردة دورا هاما في ايجاد معكوس المصفوفة .

مثال 1

بين ما اذا كانت المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

مفردة أم غير مفردة ؟

الحل:

لتحديد ما اذا كانت هذه المصفوفة مفردة أم غير مفردة نوجد محددها كالآتي :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1) + 2(-1) = -3 - 2 = -5 \neq 0$$

حيث أن

$$det(A) \neq 0$$

فالمصفوفة A مصفوفة غير مفردة .

مثال 2

بين ما اذا كانت المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

مفردة أم غير مفردة ؟

الحل:

لتحديد ما اذا كانت هذه المصفوفة مفردة أم غير مفردة نوجد محددها كالآتي :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1) - 2(-2) + (-1)$$

$$= -3 + 4 - 1 = 0$$

حيث أن

$$det(A) = 0$$

فالمصفوفة A مصفوفة مفردة .

2) النظير الضربى لمصفوفة مربعة (المعكوس الضربى للمصفوفة)

اذا كانت A مصفوفة مربعة ، B مصفوفة مربعة من نفس الرتبة للمصفوفة A حيث

$$AB = BA = I$$

فانه يقال أن المصفوفة B هي النظير الضربي للمصفوفة A أو المعكوس الضربي للمصفوفة A . لاحظ أن المصفوفة B وحيدة ويرمز لها بالرمز A^{-1} .

مثال 3

اذا كان $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ ، $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

فان

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

أي أن

$$B = A^{-1}$$

لاحظ أنه اذا كانت B هي النظير الضربي للمصفوفة A فان A هي النظير الضربي للمصفوفة B أي أن

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

ملاحظة (1) :

لايجاد النظير الضربي للمصفوفة A نتبع الآتي

1) نوجد محدد المصفوفة $A = |A|$ وفي حالة أن $|A| = 0$ اذا ليس لها نظير ضربي.

2) نكون المصفوفة B التي عناصرها هي المحددات المرافقة لكل عنصر في المصفوفة A موضوعة مكان نفس العنصر .

3) نطبق قاعدة الاشارات على المصفوفة B .

4) $A^{-1} = \frac{1}{|A|} B^T$ بحيث $A^{-1} \neq 0$

الطريقة المبسطة للحصول على معكوس مصفوفة 2×2

بشكل عام يمكننا ايجاد معكوس $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

باستخدام الطريقة

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

مثال 4

أوجد النظير الضربي للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

الحل:

أولا توجد محدد المصفوفة $|A| = 0 — 2 = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

مثال 5

أوجد النظير الضربي للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\\1&5&12\end{pmatrix}$

الحل:

$$B=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}3&5\\5&12\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&5\\1&12\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&3\\1&5\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2&3\\5&12\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&3\\1&12\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2\\1&5\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2&3\\3&5\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3\\1&5\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}36-25 & -(12-5) & 5-3\\ -(24-15) & 12-3 & -(5-2)\\ 10-9 & -(5-3) & +3-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}11&-7&2\\-9&9&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$|A|=3$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}11&-7&2\\-9&9&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}^{T}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}11&-9&1\\-7&9&-2\\2&-3&1\end{pmatrix}$$

تمارين

مثال 1

بين ما اذا كانت المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

مفردة أم غير مفردة ؟

الحل:

لتحديد ما اذا كانت هذه المصفوفة مفردة أم غير مفردة نوجد محددها كالآتي :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(1) - 2(-10) + (-5)$$

$$= 3 + 20 - 5 = 18$$

حيث أن

$$det(A) \neq 0$$

فالمصفوفة A مصفوفة غير مفردة .

مثال 2

ضع علامة (صح) أمام الاجابة الصحيحة وعلامة (خطأ) أمام العبارة الخاطئة فيما يلي :

(i)	المصفوفة $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ لها نظير ضربي .	خطأ
(ii)	المصفوفة $\begin{pmatrix} 3 & x \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ يكون لها نظير اذا كانت $x = 6$	خطأ

مثال 3

اختر الجابة الصحيحة فيما يلي :

1	نظير المصفوفة $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ يساوي			
	$\begin{pmatrix} -3 & -9 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$	ليس لها نظير
2	المصفوفة $\begin{pmatrix} 3 & x \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ ليس لها نظير ضربي اذا كانت x تساوي			
	6	9	18	-9
3	قيمة المحدد $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ يساوي			
	-9	-15	9	صفر