

الدوال

أولاً : الأزواج المرتب

$x, y \in A, B$ يسمى الزوج مرتب اذا كان

تساوي زوجان مرتبان

يكون الزوجان مرتبان $(a, b), (c, d)$ متساويان اذا كان $b = d, a = c$

وخلاف لك يكون الزوجان مختلفان

▪ ونلاحظ أن الزوج المرتب $(b, a) \neq (a, b)$

ثانياً : حاصل الضرب الكارتيزي

حاصل الضرب الكارتيزي لمجموعتين A, B هو مجموعة الأزواج المرتبة

(x, y) حيث $x \in A, y \in B$

ويقرأ $(A \text{ cross } B)$

مثال 1

أوجد $A \times B, B \times A$ للمجموعتين $A = \{2,5\}, B = \{-2,0,3\}$

الحل:

$$A \times B = \{(2, -2), (2, 0), (2, 3), (5, -2), (5, 0), (5, 3)\}$$

$$B \times A = \{(-2, 2), (-2, 5), (0, 2), (0, 5), (3, 2), (3, 5)\}$$

مثال 2

إذا كان $B = \{a, b\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ أوجد $B \times A$, $A \times B$

الحل:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

😊 ملاحظة هامة

❖ نلاحظ أن $B \times A \neq A \times B$

❖ عدد عناصر $B \times A =$ عدد عناصر $A \times B =$ عدد عناصر A في عدد

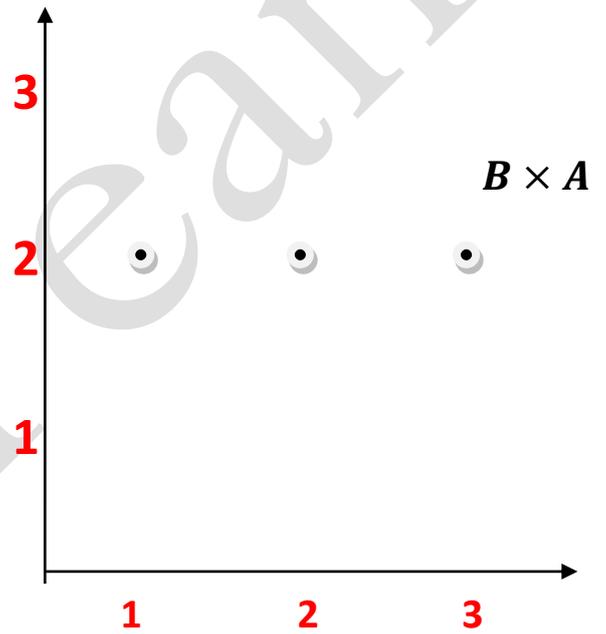
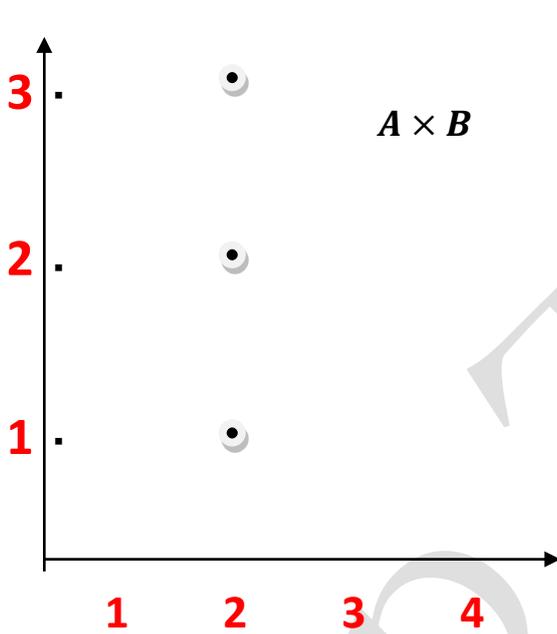
$$\text{عناصر } B \text{ أي أن } |A \times B| = |B \times A| = |A| \times |B|$$

مثال 3

إذا كانت $B = \{1,2,3\}$, $A = \{0,2\}$ أوجد $B \times A$, $A \times B$ ومثل ذلك بيانياً
الحل:

$$A \times B = \{(0,1), (0,2), (0,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$$

$$B \times A = \{(1,0), (1,2), (2,0), (2,2), (3,0), (3,2)\}$$

ثالثاً : العلاقة

- العلاقة : هي مجموعة من الأزواج المرتبة وتسمى مجموعة الأعداد في الاحداثي الأول مجال العلاقة بينما تسمى مجموعة الأعداد في الاحداث الثاني مدى العلاقة.
- وتعرف العلاقة أيضاً على أنها مجموعة جزئية من حاصل ضرب مجموعتين .

مثال 4

يمكن اعتبار $A_2 = \{(3, a), (3, b)\}$, $A_1 = \{(1, a), (1, b)\}$
 $A_3 = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$ علاقات من A الى B لأنهم مجموعات
 جزئية من $A \times B$ حيث $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$

تعريف الدالة:

الدالة $F: x \rightarrow y$ هي عبارة عن علاقة او قاعدة بين مجموعتين غير خاليتين x, y

بحيث يرتبط كل عنصر من x بعنصر وحيد من y

والمجموعة x تسمى مجال الداله F ، ويرمز لها بالرمز D_F

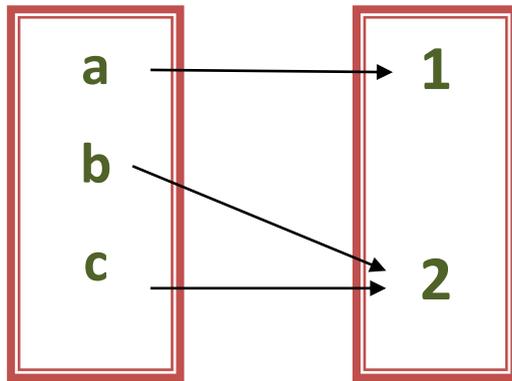
والمجموعة y تسمى بالمجال المقابل للدالة F .

المدى: عبارة عن المجموعة التي تحتوي على صور أو قيم عناصر المجال ، والمدى مجموعة جزئية من المجال المقابل .

مثال 5

إذا كانت $B = \{1,2\}$, $A = \{a, b, c\}$ عرف الدالة F من A إلى B وأوجد مداها

الحل :



$$A \xrightarrow{F} B$$

صورة العنصر (a) هو العنصر (1)

$$F(a)=1 \quad \text{أي أن}$$

وصورة العنصر (b) هي العنصر (2)

$$F(b)=2 \quad \text{أي أن}$$

وصورة العنصر (c) هو العنصر (3)

$$F(c)=3 \quad \text{أي أن}$$

∴ المدى $\{(c, 2), (b, 2), (a, 1)\}$

مثال 6

إذا كانت $A = \{0,1,2,3\}$ ، $B = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ ، ع علاقة من س الى ص حيث (أ،ع،ب) تعني أن $\frac{1}{2} = \frac{ب}{أ}$ ، لكل $أ \in A$ ، $ب \in B$ ، اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وأوجد مجال الدالة والمجال المقابل والمدى.

الحل:

بيان ع = $\{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$

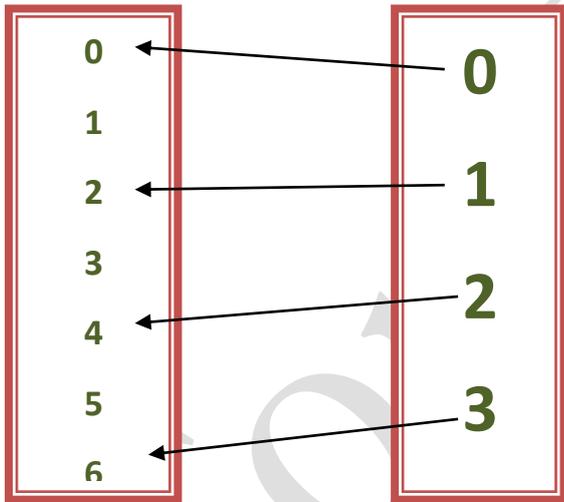
مجال الدالة هو المجموعة A

المجال = $\{0,1,2,3\}$

المجال المقابل هو عناصر B

المجال المقابل = $\{0,1,2,3,4,5,6\}$

المدى = $\{0,2,4,6\}$



مثال 7

إذا كانت $B = \{a, b, c, d\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ فبين أيّاً من العلاقات الآتية تمثل دالة من A إلى B وإذا كانت دالة أوجد مداها .

$$1. F = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, d)\}$$

الحل:

لا تمثل دالة لأن $2 \rightarrow b$, $2 \rightarrow c$

$$2. F = \{(1, b), (2, c), (3, a)\}$$

الحل:

تمثل دالة

مداها هو $\{b, c, a\}$

$$3. F = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$$

الحل:

تمثل دالة

ومداها هو $\{a\}$

مثال 8

إذا كان $F: R \rightarrow R$ بحيث $F(x) = x^3 + 3$ أوجد $F(2)$, $F(0)$
الحل:

$$F(x) = x^3 + 3$$

$$F(0) = 3$$

$$F(2) = 2^3 + 3 = 8 + 3 = 11$$

مثال 9

إذا كانت $F(x) = 3x - 1$ أوجد $F(0)$, $F(-1)$, $F(x + 1)$
الحل:

$$F(x) = 3x - 1$$

$$F(x + 1) = 3(x + 1) - 1 = 3x + 3 - 1 = 3x + 2$$

$$F(-1) = -3 - 1 = -4$$

$$F(0) = -1$$

مثال 10

إذا كانت $F(x) = 2x^2 + 3x - 1$ أوجد $F(0)$, $F(-2)$, $F(2x)$

الحل:

$$F(x) = 2x^2 + 3x - 1$$

$$\therefore F(2x) = 2(2x)^2 + 3(2x) - 1$$

$$= 8x^2 + 6x - 1$$

$$\therefore F(-2) = 2(-2)^2 + 3(-2) - 1 = 8 - 6 - 1 = 1$$

$$F(0) = -1$$

مثال 11

إذا كانت $F(x) = 10$ أوجد $F(0)$, $F(-3)$, $F(10x)$

الحل:

$$F(x) = 10$$

$$F(10x) = 10$$

$$F(-3) = 10$$

$$F(0) = 10$$

مثال 12

إذا كانت $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة كالتالي $F(x) = 3x + 7$ أوجد $F(-5), F(2)$

الحل:

$$F(x) = 3x + 7$$

$$F(2) = 3(2) + 7 = 6 + 7 = 13$$

$$F(-5) = -3(5) + 7 = -15 + 7 = 8$$

مثال 13

إذا كانت $F(x) = \sqrt{x + 5}$ أوجد $F(0), F(5), F(-5)$

الحل:

$$F(x) = \sqrt{x + 5}$$

$$F(-5) = \sqrt{-5 + 5} = 0$$

$$F(5) = \sqrt{5 + 5} = \sqrt{10}$$

$$F(0) = \sqrt{5}$$

مثال 14

إذا كانت $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة كالتالي $F(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ فأوجد $F(1), F(2), F(0)$

الحل:

$$F(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x+1$$

$$F(0) = 1, F(2) = 2+1 = 3, F(1) = 1+1 = 2$$

مثال 15

هل تمثل العلاقات التالية دوال..؟

1. $\{(2,4), (3,4), (4,4)\}$

تمثل دالة

2. $\{(1,4), (1,8), (2,3)\}$

ليست دالة

3. $\{(-2,1), (9,2), (4,2)\}$

تمثل دالة

4. $\{(3, -4), (1,2), (1,5), (0,7)\}$

ليست دالة

مثال 16

لتكن $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 4\}$ أوجد $A \times B$

الحل:

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 4)\}$$

مثال 17

حدد ما اذا كانت العلاقات التالية من $A = \{3, 5, 7, 9\}$, $B = \{a, b, c, d\}$

تمثل دالة أم لا

$$A_1 = \{(3, a), (5, c), (7, b), (9, d)\}$$

تمثل دالة حيث أن كل عنصر من A يرتبط بعنصر من B

$$A_2 = \{(5, a), (7, b)\}$$

ليست دالة حيث أن كل عنصر من A لم يرتبط بعنصر من B

$$A_3 = \{(3, a), (3, b), (5, a), (7, b), (9, d)\}$$

ليست دالة حيث أن العنصر 3 ارتبط أكثر من مرة مع عناصر B

$$A_4 = \{(3, a), (5, a), (7, a), (9, a)\}$$

تمثل دالة لأن كل عنصر من عناصر A ظهر كمسقط مرة واحدة فقط

مثال 18

أوجد المجال والمدى للدوال الآتية

a. $\{(2,5), (3,7), (4,9)\}$

المجال = $\{2,3,4\}$

المدى = $\{5,7,9\}$

b. $\{(1,1), (2,2), (4,4), (9,9)\}$

المجال = $\{1,2,4,9\}$

المدى = $\{1,2,4,9\}$

c. $\{(-2,0), (-1,-2), (1,2), (0,-1)\}$

المجال = $\{0, -2, 2, -1\}$

المدى = $\{-2, -1, 1, 0\}$

d. $\{(1,-3), (2,-1), (3,1), (4,3), (5,5)\}$

المجال = $\{1,2,3,4,5\}$

المدى = $\{-3, -1, 1, 3, 5\}$