المتتابعات

تعريف المتتابعة :

المتتابعة هي مجموع من الأعداد تتمتع بنمط معين من الترتيب وكل عدد من المجموعة يسمى الحد .

يرمز للحد الأول a_1 والحد الثاني a_2 والحد الثالث a_3 وهكذا وقد تكون المتتابعات المنتهية (لها عدد محدد من الحدود أو لها حد أخير) أو متتابعات غير منتهية والتي يكون عدد حدودها غير محدود .

ملاحظة :

سندرس نوعان من المتتابعات وهما المتتابعة الحسابية والمتتابعة الهندسية .

المتتابعة الحسابية:

تعريف المتتابعة الحسابية :

$\{a_n\}$ هي متتابعة كل حد فيها يساوي الحد السابق مضافا اليه مقدار ثابت يسمى أساس المتتابعة ويرمز لها بالرمز d .

أي أن :

$$d = a_{n+1} - a_n$$

مثال 1

هل المتتابعات الآتية حسابية أم لا ؟

a) $\{5 , 10 , 15 , 20 , \ldots\}$

$a_1 = 5 , a_2 = 10 , a_3 = 15 , a_4 = 20 , \ldots$

حيث أن :

$a_2 - a_1 = 10 - 5 = 5$

$a_3 - a_2 = 15 - 10 = 5$

$a_4 - a_3 = 20 - 15 = 5$

اذا نحصل على أي حد من حدود المتتابعة باضافة 5 الى الحد السابق له . وبالتالي تكون المتتابعة حسابية .

b) $\{1 , -3 , -7 , -11, \ldots\}$

$a_1 = 1 , a_2 = -3 , a_3 = -7 , a_4 = -11 , \ldots$

حيث أن :

$a_2 - a_1 = -3 - 1 = -4$

$a_3 - a_2 = -7 - (-3) = -4$

$a_4 - a_3 = -11 - (-7) = -4$

اذا المتتابعة حسابية وأساسها هو

$d = -4$

TopTeam

c) {2 , 4 , 7 , 11 , ...}

$a_1 = 2 , a_2 = 4 , a_3 = 7 , a_4 = 11 , \ldots$

حيث أن :

$a_2 - a_1 = 4 - 2 = 2$

$a_3 - a_2 = 7 - 4 = 3$

نلاحظ أن

$a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$

ومن ثم فان المتتابعة ليست حسابية .

الحد النوني للمتتابعة الحسابية :

الحد النوني في المتتابعة الحسابية هو

$$a_n = a_1 + (n - 1) d$$

حيث

a_1 هو الحد الأول .

d أساس المتتابعة .

n عدد طبيعي وهو ترتيب الحد .

ملاحظة :

يمكن كتابة المتتابعة على الصورة

$$a_1 , \ a_1 + d , a_1 + 2 d \ , a_1 + 3 d$$

مثال 2

أوجد الحد النوني من المتتابعة الحسابية التي حدها الأول 5 وأساسها 3 .

الحل :

حيث أن $a_1 = 5$, $d = 3$

اذا

$$a_n = 5 + 3 (n - 1)$$

$$= 5 + 3n - 3 = 3n + 2$$

مثال 3

أوجد الحد النوني للمتتابعة الحسابية

$$12 , 7 , 2 , -3 , -8 , \ldots$$

الحل:

حيث أن $a_1 = 12$, $d = 7 - 12 = -5$

اذا الحد النوني يعطى بالعلاقة

$$a_n = a_1 + (n - 1) d = 12 + (n - 1)(-5)$$

$$= 12 - 5n + 5 = -5n + 17$$

Top Team

مثال 4

أوجد الحد العشرون من المتتابعة

9 , 16 , 23 , 30 , ...

الحل:

$a_1 = 9$, $d = 16 - 9 = 23 - 16 = 7$

$a_n = a_1 + (n - 1)\, d = 9 + (n - 1)(7)$

$= 9 + 7n - 7 = 7n + 2$

اذا نحصل على الحد رقم عشرون وذلك بالتعويض $n = 20$ في الحد النوني

$a_{20} = 7\,(20) + 2 = 142$

Top Team

مثال 5

أوجد الحد العاشر من المتتابعة الحسابية

$12 , 6 , 0 , -6 , \ldots$

الحل :

$$a_1 = 12 , d = 6 - 12 = 0 - 6 = -6$$

اذا

$$a_2 = a_1 + (n - 1) d$$

$$= 12 + (n - 1) (-6)$$

$$= 12 - 6n + 6 = - 6n + 18$$

للحصول على الحد العاشر نعوض $n = 10$ في الحد النوني

$$a_{10} = -6 (10) + 18 = - 42$$

Top Team

مثال 6

اذا كان الحد النوني من متتابعة حسابية هو

$$a_n = -2n + 5$$

أوجد المتتابعة ؟

الحل:

لايجاد حدود المتتابعة نضع n = 1 , 2 , 3 , 4 , .. في الحد النوني نحصل على

$$a_1 = -2\ (1) + 5 = 3$$

$$a_2 = -2\ (2) + 5 = 1$$

$$a_3 = -2\ (3) + 5 = -6 + 5 = 1$$

$$a_4 = -2\ (4) + 5 = -3$$

اذا المتتابعة هي

$$3 , 1 , -1 , -3 , \ldots$$

وحدها الأول هو 3 وأساسها هو

$$d = 1 - 3 = -2$$

Top Team

مثال 7

اذا كان أساس المتتابعة الحسابية هو 6 والحد الخامس يساوي 19 أوجد المتتابعة

الحل:

لدينا $a_5 = 19$, $d = 6$

ومن تعريف الحد النوني بأن

$$a_5 = a_1 + 4d$$

وبالتعويض عن $a_5 = 19$, $d = 6$

فاننا نحصل على

$$19 = a_1 + 4(6)$$

$$19 = a_1 + 24$$

$$\Rightarrow a_1 = 19 - 24 = -5$$

اذا حدود المتتابعة تكون $a_1 = -5$

$$a_2 = a_1 + d = -5 + 6 = 1$$

$$a_3 = a_2 + d = 1 + 6 = 7$$

$$a_4 = a_3 + d = 7 + 6 = 13$$

ومن ثم تكون المتتابعة

$$-5 , 1 , 7 , 13 , \ldots$$

Top Team

مثال 8

أوجد رتبة الحد الذي قيمته تساوي 15 في المتتابعة الحسابية التي حدها الأول هو 3 – وأساسها 3 .

الحل :

لدينا

$$a_n = 15$$

$$a_1 = -3$$

$$d = 3$$

اذا

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d = 15$$

$$-3 + (n-1)(3) = 15$$

$$-3 + 3n - 3 = 15$$

$$3n = 15 + 6 = 21$$

$$\Rightarrow n = \frac{21}{3} = 7$$

اذا الحد الذي قيمته 15 هو الحد السابع أي أن

$$a_7 = 15$$

Top Team

مثال 9

اذا كانت 14 , z , y , x , 2 في تتابع حسابي أوجد قيمة كلا من x , y , z ؟

الحل:

لدينا

$$a_1 = 2 \ , \ a_2 = x \ , \ a_3 = y \ , \ a_4 = z \ , \ a_5 = 15$$

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$14 = 2 + 4d$$

$$4d = 14 - 2 = 12$$

$$\Rightarrow d = \frac{12}{4} = 3$$

ومن ثم

$$x = a_2 = a_1 + d = 2 + 3 = 5$$

$$y = a_3 = a_2 + d = 5 + 3 = 8$$

$$z = a_4 = a_3 + d = 8 + 3 = 11$$

وتكون المتتابعة على الصورة

$$2 , 5 , 8 , 11 , 14$$

Top Team

مثال 10

اذا كان الدخل السنوي لمؤسسة 92000 ريال ويزيد سنويا بمقدار ثابت 16000 ريال فبعد كم سنة يصبح دخل المؤسسة 380000 ريال ؟

الحل:

حيث أن قيمة الزيادة السنوية الثابتة اذا

$$d = 16000 \ , \ a_1 = 92000 \ , \ a_n = 380000$$

لدينا

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$380000 = 92000 + (n-1)(16000)$$

$$380000 = 92000 + 16000\,n - 16000$$

$$380000 = 16000\,n + 76000$$

$$16000\,n = 304000$$

$$n = \frac{304000}{16000}$$

$$n = 19$$

اذا يصبح دخل المؤسسة 380000 بعد 19 سنة .

Top Team

مجموع المتتابعة الحسابية :

اذا كان لدينا متتابعة حسابية $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n$

فان مجموع المتتابعة يكون

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

ويعطى قانون مجموع المتتابعة الحسابية التي عدد حدودها n كالآتي

$$S_n = \frac{n}{2} [\, 2\, a_1 + (\, n - 1\,)\, d\,]$$

وأيضا اذا كان لدينا متتابعة حسابية حدها الأول a_1 وحدها الأخير a_n
فان مجموع n من الحدود يعطى بالعلاقة

$$S_n = \frac{n}{2} [\, a_1 + a_2\,]$$

مثال 11

أوجد مجموع الستة حدود الأولى من المتتابعة

$1 , 7 , 13 , 19 , \dots$

الحل:

لدينا $a_1 = 1 \ , \ d = 7 - 1 = 6$

فان مجموع الستة حدود الأولى هو

$$S_6 = \frac{6}{2} [\, 2(1) + (6 - 1\,)6\,]$$

$$= 3\, [\, 2 + 30\,] = 96$$

Top Team

مثال 12

اذا كان الحد الأول يساوي 5 والحد الثاني عشر 115 من متتابعة حسابية . أوجد مجموعة الأثنى عشر حدا الأولى منها ؟

الحل:

حيث أن $a_1 = 5$, $a_{12} = 115$, $n = 12$

فان مجموع المتتابعة يعطى بالعلاقة

$$S_{12} = \frac{12}{2} [5 + 115] = 6 (120) = 720$$

مثال 13

اذا كان الحد الأول من متتابعة حسابية يساوي 5 وحدها الأخير يساوي 125 ومجموعها يساوي 845 أوجد عدد حدود المتتابعة ؟

الحل:

حيث أن $a_1 = 5$, $a_n = 125$, $S_n = 845$

حيث أن $S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$

$$S_n = \frac{n}{2} [5 + 125]$$

$$845 = \frac{n}{2} [130]$$

$$\Rightarrow n = \frac{845}{65} = 13$$

مثال 14

أوجد مجموع الأعداد الطبيعية من 1 الى 100 ؟

الحل:

$$a_1 = 1 \quad , \quad a_{100} = 100$$

اذا $n = 100$

$$S_n = \frac{n}{2}[\, a_1 + a_n \,]$$

$$S_{100} = \frac{100}{2}[\, 1 + 100 \,]$$

$$= 50\,(101) = 5050$$

مثال 15

اذا كان لدينا متتابعة حسابية حدها الأول 3 وحدها الأخير 30 ومجموعهما 165 أوجد عدد حدودها ؟

الحل:

بما أن

$$a_1 = 3 \ , \ a_n = 30 \ , \ S_n = 165$$

$$S_n = \frac{n}{2}[\, a_1 + a_n \,]$$

$$165 = \frac{n}{2}[\, 3 + 30 \,]$$

$$165 = \frac{33}{2}n \Rightarrow n = \frac{2(165)}{33} = \frac{330}{33} = 10$$

أي أن عدد حدود المتتابعة هو 10 .

Top Team

المتتابعة الهندسية :

هي متتابعة كل حد فيها يساوي ناتج ضرب الحد السابق له بعدد حقيقي ثابت r مثلا ويسمى بأساس المتتابعة وتكون على الصورة

$$a , ar , ar^2 , ar^3 , \dots$$

مثال 16

هل المتتابعات التالية هندسية أم لا

(a $1 , 3 , 9 , 27 , 81 , \dots$

حيث أن

$a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 9$, $a_4 = 27 , \dots$

نلاحظ أن

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{27}{9} = 3$$

فان المتتاعبة تكون هندسية أساسها $r = 3$

Top Team

16 , 8 , 4 , 2 , 1 , … (b

حيث أن

$a_1 = 16$, $a_2 = 8$, $a_3 = 4$, $a_4 = 2$, …

يكون لدينا

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

فان المتتاعبة تكون هندسية أساسها $r = \frac{1}{2}$

3 , 6 , 18 , 27 , … (c

حيث أن

$a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 18$, $a_4 = 27$, …

فان

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\frac{a_3}{a_2} \neq \frac{a_2}{a_1}$$

فان المتتاعبة تكون غير هندسية

Top Team

الحد النوني في المتتابعة الهندسية :

يعطى الحد النوني للمتتابعة الهندسية حدها الأول a وأساسها r بالصيغة التالية

$$a_n = a\, r^{n-1}$$

حيث n عدد طبيعي .

مثال 17

اكتب الخمسة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية التي حدها الأول 9 وأساسها 2 ؟

الحل:

حيث أن الحد النوني يعطى بالعلاقة $a_n = a\, r^{n-1}$

وحيث $a = 9$, $r = 2$ فان

$$(1)\quad a_n = 9\,(2)^{n-1}$$

لايجاد الحد الثاني نضع $n = 2$ في المعادلة (1)

$$a_n = 9\,(2)^{1} = 18$$

لايجاد الحد الثالث نضع $n = 3$

لنحصل على $a_3 = 9(2)^2 = 9(4) = 36$

وبالمثال نحصل على الحدين

$$a_4 = 9(2)^3 = 9(8) = 72$$

$$a_5 = 9(2)^4 = 9(16) = 144$$

وعليه فان الخمسة حدود الأولى 9 , 18 , 36 , 72 , 144

مثال 18

أوجد الحد السادس من المتتابعة الهندسية التي حدها الأول 6 وأساسها 3 ؟

الحل:

لدينا $a = 6 \quad , \quad r = 3$

فان $a_6 = ar^5 = 6(3)^5 = 6\,(243) = 1458$

مثال 19

أوجد الحد النوني لمتتابعة هندسية أساسها 6 وحدها الخامس يساوي 5 ؟

الحل:

$$r = 6 \ , \ a_5 = 5$$

حيث

$$ar^4 = a_5$$

$$\therefore a\,(6)^4 = 5$$

$$a = \frac{5}{6^4}$$

الحد النوني يعطى بالعلاقة

$$a_n = ar^{n-1} = \frac{5}{6^4}(6)^{n-1}$$

$$= 5\,(6^{n-1-4}) = 5\,(6^{n-3})$$

Top Team

مثال 20

أوجد الحد النوني من المتتابعة الهندسية

$$-\frac{1}{4}, 2, -16, 128$$

الحل:

لدينا $a = -\frac{1}{4}$

لايجاد أساس المتتابعة $r = \frac{2}{-1/4} = -2(4) = 8$

اذا $a_n = ar^{n-1} = -\frac{1}{4}(-8)^{n-1}$

$$= \frac{(-1)^n}{4}(8)^{n-1}$$

مثال 21

أوجد الحد النوني للمتتابعة الهندسية

$$2, 8, 32, 128$$

الحل:

نجد أن $a = 2$

$$r = \frac{8}{2} = 4$$

فان الحد النوني يعطى بالعلاقة

$$a_n = ar^{n-1} = 2(4)^{n-1} = 2(2^2)^{n-1} = 2(2)^{2n+2}$$

اذا $a_n = 2^{2n-1}$

Top Team

مثال 22

أوجد أساس المتتابعة الهندسية التي حدها النوني

$$a_n = 3^{2n-1}$$

الحل:

نوجد الحد a_{n+1} كالآتي

$$a_{n+1} = 3^{2(n+1)-1} = 3^{2n+2-1} = 3^{2n+1}$$

ومنها فان أساس المتتابعة يعطى بالعلاقة

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{2n+1}}{3^{2n-1}}$$

$$= 3^{(2n+1)-(2n-1)}$$

$$= 3^{1+1}$$

$$= 3^2 = 9$$

Top Team

مثال 23

اذا كان عدد سكان في مدينة ما 10000 نسمة وعلما بأن معدل تكاثر السكان يزداد كل علم بنسبة 10% عن العام الذي يسبقه مباشراً أوجد عدد السكان بعد عشر سنوات ؟

الحل:

الحد الأول من المتتابعة الهندسية هو

$$a_1 = 10000$$

الحد الثاني هو

$$a_2 = 10000 + 10000 \times \frac{10}{100}$$

$$= 10000 + 1000 = 11000$$

الحد الثالث هو

$$a_3 = 11000 + 11000 \times \frac{10}{100} = 12100$$

اذا أساس المتتابعة $r = \frac{11000}{10000} = \frac{11}{10} 1.1$

اذا الحد النوني يساوي $a_n = ar^{n-1} = 10000\ (1.1)^{n-1}$

ويكون عدد السكان بعد عشرة سنوات بمعنى عدد السكان في بداية العام الحادي عشر أي أن a_{11}

$$a_{11} = 10000(1.1)^{10}$$

Top Team

مثال 24

تنقص قيمة سيارة بمعدل 15% كل سنة أوجد قيمتها نهاية السنة الثالثة اذا كان ثمنها الأصلي 20000 ريال

الحل:

الحد الأول من المتتابعة الهندسية هو 20000

أساس المتتابعة

$$r = 1 - \frac{15}{100}$$

ومن ثم ثمن السيارة في نهاية السنة الثالثة نضع n = 4 في

$$a_n = ar^{n-1}$$

اذا $a_4 = 20000\,(0.85)^3 = 12282.5$

مجموع المتتابعة الهندسية :

اذا كان $a \ , \ ar \ , \ ar^2 \ , \ ar^3 \ , \ \dots \ , \ ar^{n-1}$

متتابعة هندسية عدد حدودها n وأساسها r فان مجموعها يعطى بالعلاقة

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

حيث $r \neq 1$

اذا كان عدد حدود المتتابعة الهندسية لا نهائي وأساس المتتابعة يحقق $-1 < r < 1$ **فان مجموعها هو**

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$

مثال 25

أوجد مجموع المتتابعة الهندسية التي حدها الأول يساوي 2 وعدد حدودها 5 وأساسها يساوي 3 ؟

الحل:

حيث أن المجموع يعطى بالعلاقة

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

اذا

$$S_n = \frac{2((3)^5-1)}{3-1} = 243 - 1 = 242$$

مثال 26

أوجد مجموع العشرة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية

$$2 \ , \ 4 \ , \ 8 \ , \ 16 \ , \ 32 \ , \ \dots$$

الحل:

حيث أن $a = 2$

وأساس المتتابعة $r = \frac{4}{2} = 2$

فان $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$$S_n = \frac{2(2^{10}-1)}{2-1} = 2(2^{10} - 1) = 2(1024 - 1)$$

$$= 2\ (1023) = 2046$$

Top Team

مثال 27

أوجد مجموع الستة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية

$$-3 , 6 , -12 , 24 , \dots$$

حيث أن $a = -3$

وأساس المتتابعة $r = \frac{6}{-3} = -2$

فان $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$$S_n = \frac{(-3)[(-2)^6-1]}{-2-1} = (-2)^6 - 1 = 64 - 1 = 63$$

مثال 28

أوجد مجموع المتتابعة الهندسية غير النهائية

$$1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \dots$$

$$a = 1 \quad , \quad r = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

مثال 29

أوجد مجموع المتتابعة الهندسية غير النهائية التي حدها الأول $\frac{2}{3}$ وأساسها $\frac{1}{3}$

$$a = \frac{1}{3} \quad , \quad r = \frac{2}{3}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$$

Top Team

تمارين

(1) بين نوع المتتابعات الآتيتين من حيث كونها حسابية أو هندسية

(a) 1 , 7 , 3 , 9 , …

(b) -100 , 50 , -25 , 12.5 , …

(c) 16 , 20 , 24 , 28 , …

(d) 7 , 14 , 21 , 28 , …

(e) -9 , -3 , 0 , 3 , 9 , …

(f) $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{11}{9}$, …

(g) 5 , 0 , -5 , -10 , …

(h) 147 , 21 , 14 , 7 , …

Top Team

(2) أوجد الحد النوني من المتتابعة الحسابية التي حدها الأول 10 وأساسها -2 .

(3) أوجد المتتابعة الحسابية التي حدها النوني

$a_n = 3n - 2$

(4) أوجد الحد النوني من المتتابعة الهندسية حدها الأول 3 وأساسها 10 .

(5) أوجد المتتابعة الهندسية التي حدها النوني

$a_n = 5^{n+1}$

Top Team

(6) أوجد الحد الثاني عشر من المتتابعة الحسابية
16 , 23 , 30 , 37

(7) أوجد الحد الخامس من المتتابعة الهندسية التي حدها الأول 10 وأساسها 2 .

(8) إذا كان أساس المتتابعة الحسابية هو 6 والحد السابع يساوي 30 أوجد المتتابعة

(9) أوجد رتبة الحد الذي قيمته تساوي 100 من متتابعة حسابية حدها الأول 5 وأساسها 5

Top Team

(10) أوجد مجموع المتتابعات الآتية :

(a 3 , 6 , 9 , 12 , … , 81

(b 10 , 20 , 30 , 40 , … , 200

(c 81 , 27 , 9 , 3 , …

Top Team

(11) أوجد مجموع العشر حدود الأولى من المتتابعات الآتية :

(a $7 , 14 , 21 , 28 , \ldots$

(b $5 , 25 , 125 , 625$

(c $100, 50 , 0 , -50$

(12) أوجد

(a $2 + 4 + 6 + \ldots + 60$

(b $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \infty$

Top Team

(13) إذا كان ارتفاع منضاد مملوء بغاز بعد دقيقة واحدة من انطلاقه هو 100 متر وكان ارتفاعه بعد كل دقيقة إضافية يزيد بمقدار 50% من ارتفاعه في الدقيقة السابقة أوجد ارتفاع المطاط بعد 5 دقائق .

(14) عند رجل مبلغ من المال يصرف نصفه في الشهر الأول ونصف المبلغ الباقي في الشهر الثاني وهكذا إذا كان المبلغ الباقي بعد خمسة شهور هو 3000 ريال فما هو المبلغ الأصلي .

Top Team